



# PVK – Biomechanik II

**Jack Kendall**  
*kendallj@ethz.ch*  
Juni 2020

# Allgemeine Informationen

- **Website:** <http://n.ethz.ch/student/kendallj/>
- **Podcast:** Polybox – link findet ihr auf der Website
- **Fragen:** stehe 15.06. bis 28.06. zur Verfügung – nutzt die Gelegenheit!  
«Unmuten», in Chat schreiben oder per email
  
- **Prüfung:** Moodle, 90 min, ca. 30 Fragen

# Agenda

## 1. Tag

- Gauss'sche Fehlerfortpflanzung
- Kinematik
- Koordinaten / Matrizen

## 2. Tag

- Kinetik I: Newton, Energie

## 3. Tag

- Kinetik II: Impulserhaltung, Lagrange, Inverse Dynamics

## 4. Tag

- Euler, Leistung
- Harmonischer Oszillator
- Muskel(optimierung)

# Grundlagen

Vektoren, Vektoroperationen, Trigonometrie, Rechte Hand Regel

# Lösen von Aufgaben in Biomechanik II

- Skizze und Text gut studieren und lesen
- Gegebene und **gesuchte Größen** aufschreiben
- Freischnitt und Skizze gross zeichnen
- Alles in SI Einheiten umrechnen  
 → m, m/s, kg, J, J/s, N, Nm, rad/s,...

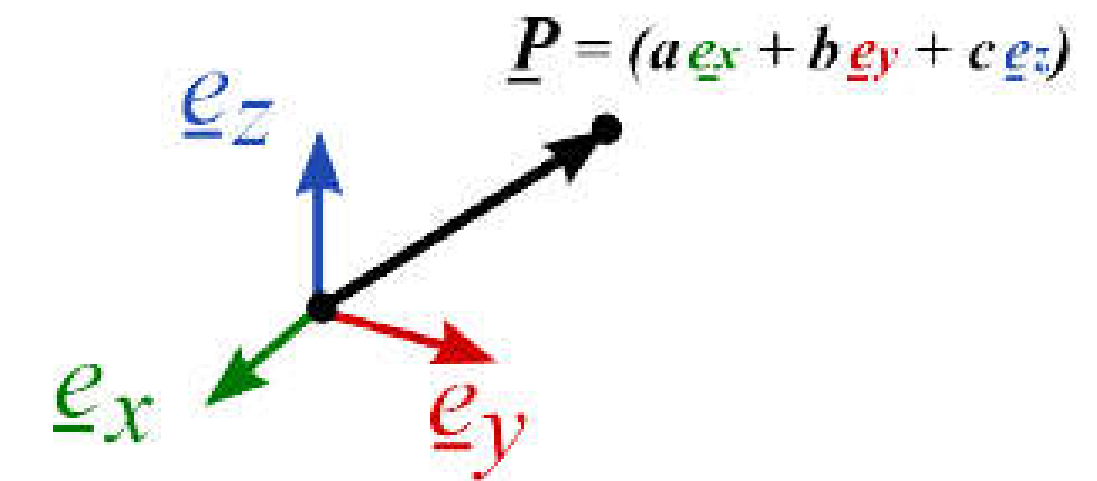
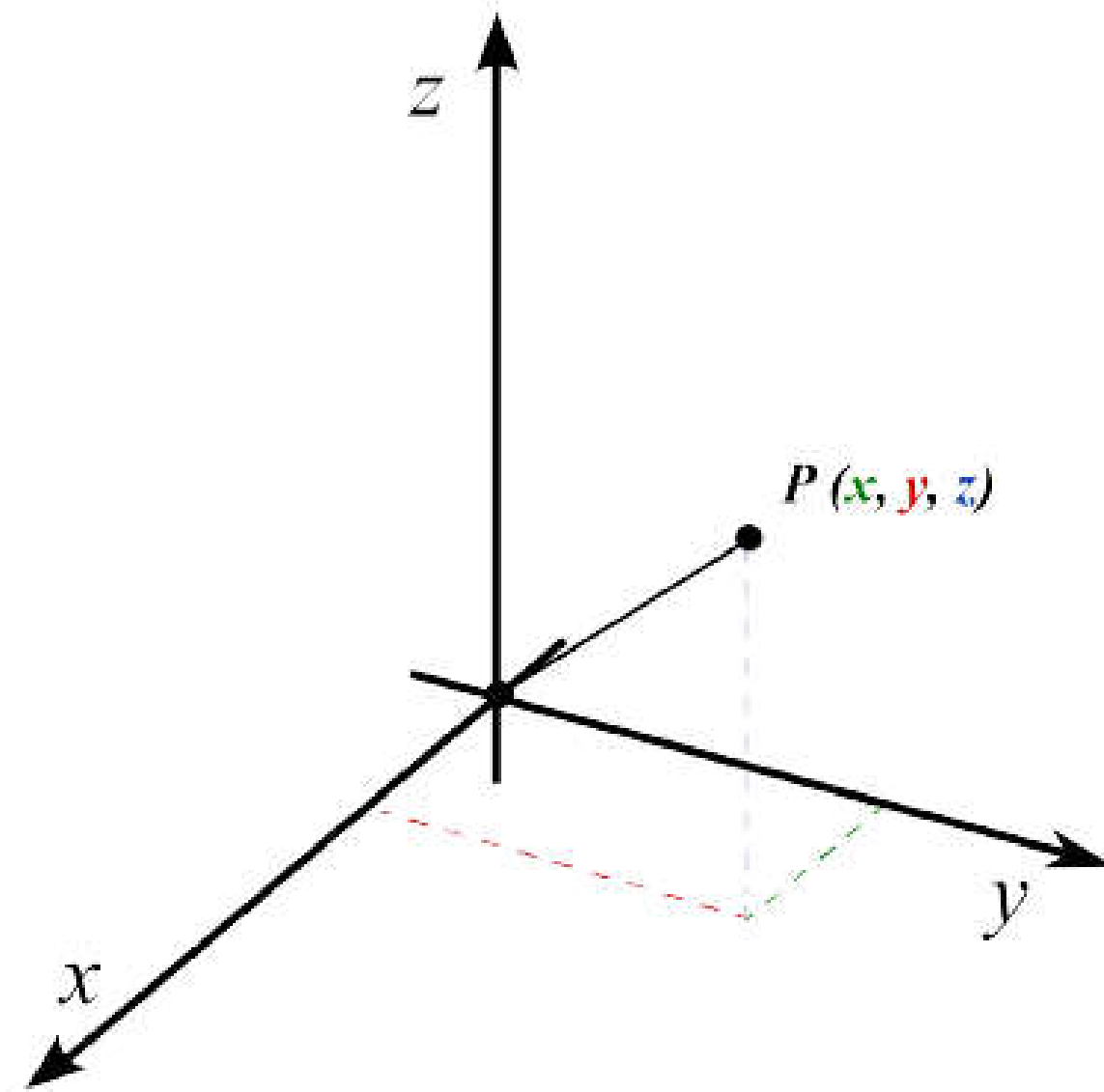
Derived Quantity		S.I. Unit	
Name	Symbol	Name	Symbol
Displacement	d	metre	m
Area	A	metre squared	m <sup>2</sup>
Volume	V	metre cubed	m <sup>3</sup>
Speed	s	metre/second	m/s
Velocity	v	metre/second	m/s
Acceleration	a	metre/second <sup>2</sup>	m/s <sup>2</sup>
Force	F	newton	N = kg m/s <sup>2</sup>
Energy	E	joule	J = N m
Density	$\rho$	kilogram/metre cubed	kg/m <sup>3</sup>
Moment	T	newton metre	N m
Power	P	watt	W = N m/s
Work	W	joule	J = N m
Momentum	$\rho$	kilogram metre/second	kg m/s = N s
Pressure	P	pascal	Pa = N/m <sup>2</sup>

# Vektoren

Die kartesische Basis besitzt pro Dimension einen Einheitsvektor, d.h. für 3-D gilt

$$\underline{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Einheitsvektor ist normiert, bedeutet dass Betrag / Länge  $|\underline{e}_x| = 1$  ist.



$$\vec{v} = \underline{v} = a\underline{e}_x + b\underline{e}_y + c\underline{e}_z = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (2)$$

wobei der Einheitsvektor  $\underline{e}_x$  in X-Richtung zeigt und mit einer Länge  $a$  multipliziert wird. Analog mit  $\underline{e}_y$  &  $b$  und  $\underline{e}_z$  &  $c$ .

# Vektoren

## 1.2 Vektoren aus Koordinatensystem ablesen

In Aufgaben müssen oft Distanzen oder Vektoren zwischen zwei Punkten bestimmt werden (Bsp. Kap. 4.1). Dabei gilt immer Spitze minus Anfang:

$$\underline{\mathbf{AB}} \hat{=} \mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{OP}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \hat{=} \mathbf{P} \quad (3)$$

wobei  $\underline{\mathbf{AB}}$  die Verbindungsgerade von  $\mathbf{A}$  nach  $\mathbf{B}$  und  $\underline{\mathbf{OP}}$  vom Ursprung  $\mathbf{O}$  zu Punkt  $\mathbf{P}$  ist.

## 1.3 Betrag und Normierung

Die Länge vom Vektor ist gleich dessen Betrag:

$$v = |\underline{\mathbf{v}}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (4)$$

Der normierte Vektor besitzt die Länge 1, behält jedoch die ursprüngliche Richtung:

$$\underline{\mathbf{e}}_v = \frac{\underline{\mathbf{v}}}{|\underline{\mathbf{v}}|} \quad |\underline{\mathbf{e}}_v| = 1 \quad (5)$$

# Vektoroperationen

$$\underline{\mathbf{v}}_a \times \underline{\mathbf{v}}_b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{c}}$$

Sind  $\underline{\mathbf{v}}_a$  &  $\underline{\mathbf{v}}_b$  parallel oder gleich, dann ist  $\underline{\mathbf{v}}_a \times \underline{\mathbf{v}}_b = \underline{\mathbf{0}}$

$$\underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{\mathbf{v}}_b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = c$$

Sind  $\underline{\mathbf{v}}_a$  &  $\underline{\mathbf{v}}_b$  orthogonal (rechtwinklig/senkrecht) zueinander, dann ist  $\underline{\mathbf{v}}_a \cdot \underline{\mathbf{v}}_b = 0$

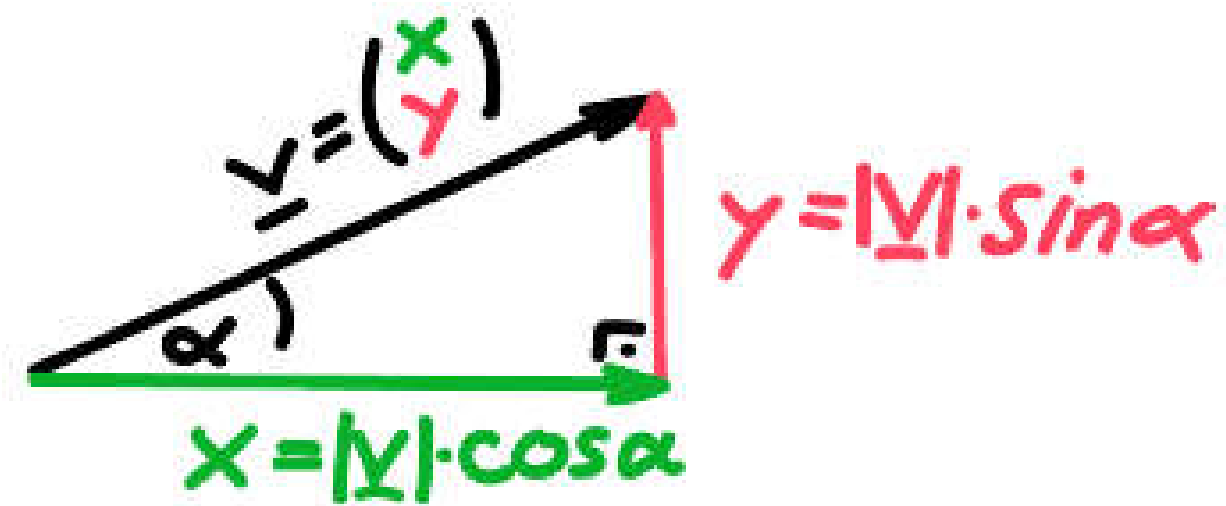
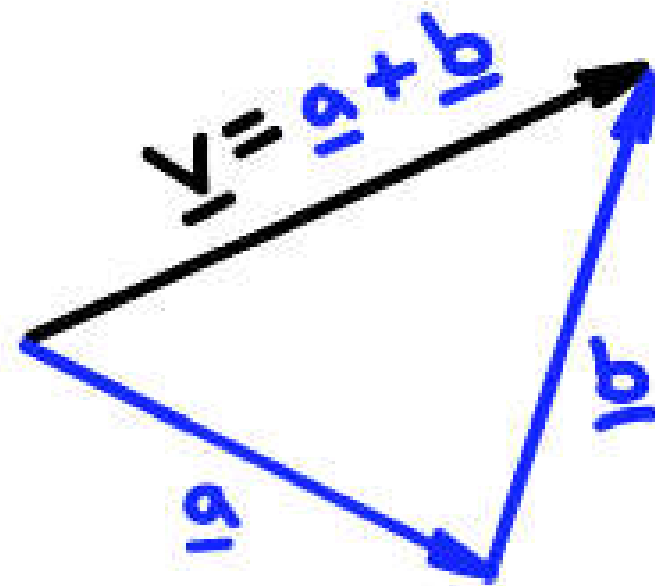
$$\lambda \cdot \underline{\mathbf{v}} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix}$$



# Vektoroperationen

$$\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Vektoren kann man sowohl zusammenzählen, als auch in einzelne Komponente zerlegen. Später wird diese Zerlegung für die Berechnung von Geschwindigkeiten, Momente und Leistungen sehr nützlich sein:



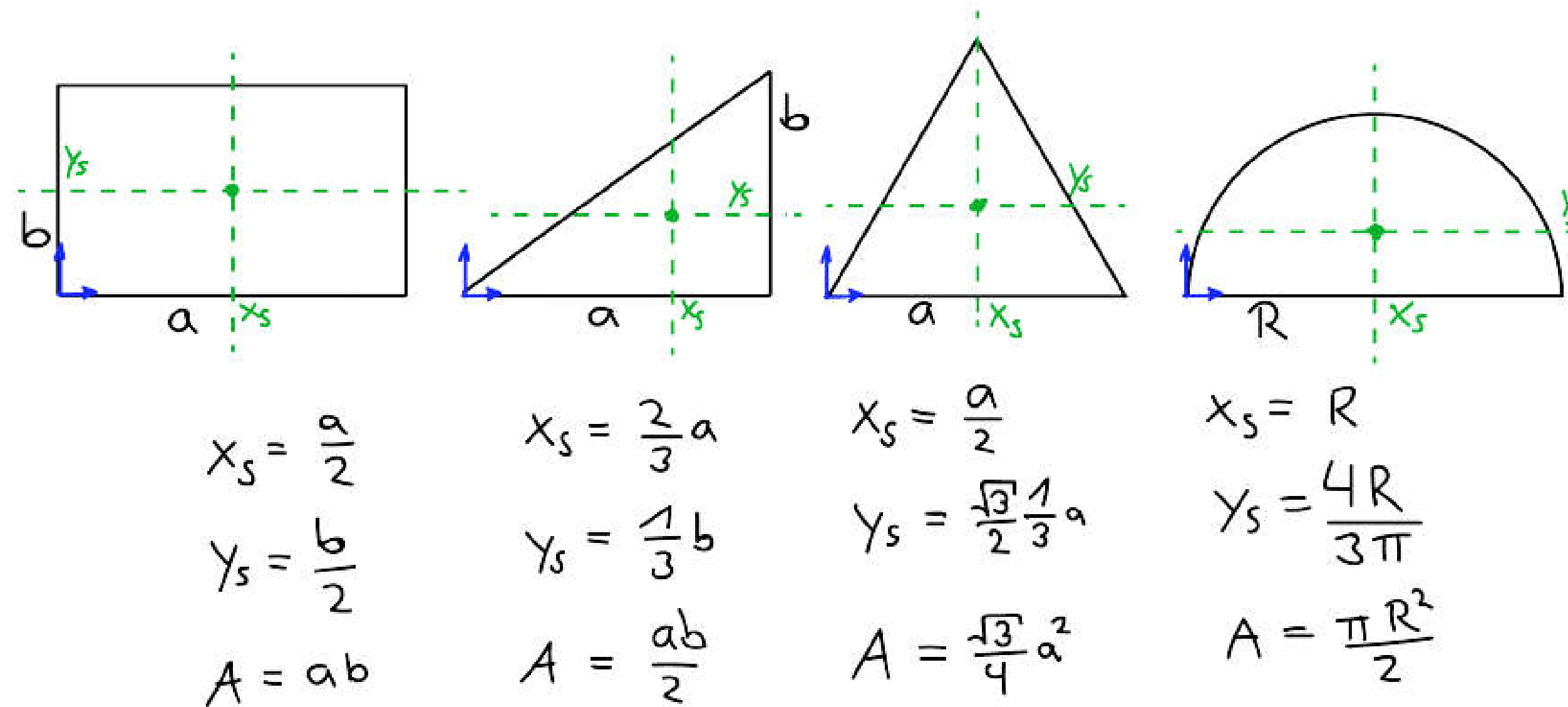
# Matrixoperationen

## 2.5 Matrixprodukt

Grundregel: Zeile Mal Spalte

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \quad (10)$$

# Schwerpunkt von Flächen



Bei Schwerpunktproblemen kann man die meisten Flächen in kleinere, bekannte Flächen aufteilen.  
Grundsätzlich sollte man die Symmetrie einer Figur zu nutze machen.

Um dann den Schwerpunkt der Gesamtfläche zu erhalten, muss man summieren und zwar:

$$x_{s,ges} = \frac{\sum_i x_{s,i} A_i}{A_{ges}}$$

$$y_{s,ges} = \frac{\sum_i y_{s,i} A_i}{A_{ges}}$$

# Schwerpunkt von Flächen (Formal)

Formal:

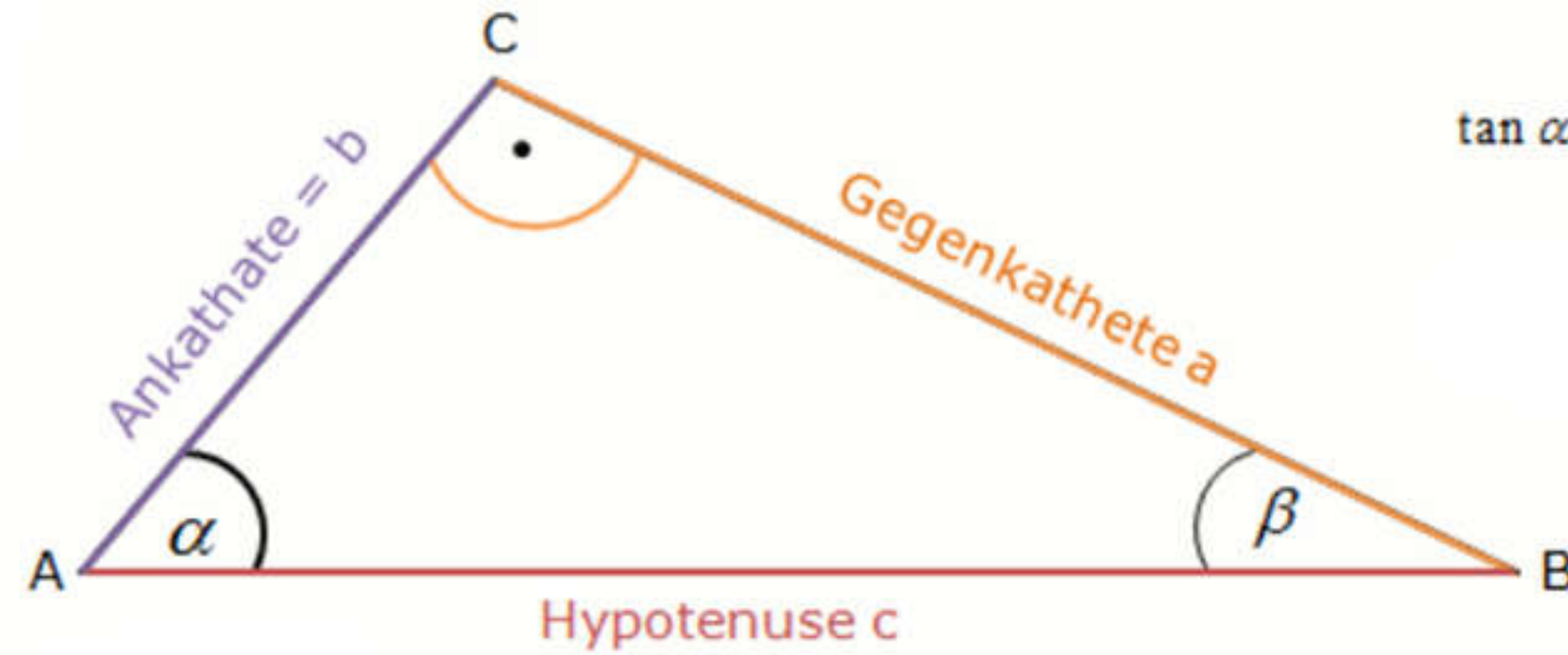
$$\mathbf{2D:} \quad x_s = \frac{\int_K x dA}{\int_K dA}, \quad y_s = \frac{\int_K y dA}{\int_K dA} \quad (14)$$

	kartesisch	zylinderisch	sphärisch
Flächenelement $dA$	$dx dy$	$r \cdot dr d\phi$	$\sin \theta \cdot d\theta d\psi$

Um dann den Schwerpunkt der Gesamtfläche zu erhalten, muss man summieren und zwar:

$$x_{s,ges} = \frac{\sum_i x_{s,i} A_i}{A_{ges}} \quad y_{s,ges} = \frac{\sum_i y_{s,i} A_i}{A_{ges}}$$

# Trigonometrie



$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} = \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} = \sin \beta$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} = \frac{a}{b} = \cot \beta$$

$\alpha$	$0 / 0^\circ$	$\frac{\pi}{6} / 30^\circ$	$\frac{\pi}{4} / 45^\circ$	$\frac{\pi}{3} / 60^\circ$	$\frac{\pi}{2} / 90^\circ$	$\pi / 180^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$	0
$\cot \alpha$	$\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\infty$

# Hilfsgleichungen

## Hilfsgleichungen

Quadratische Lösungsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sinus- und Kosinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

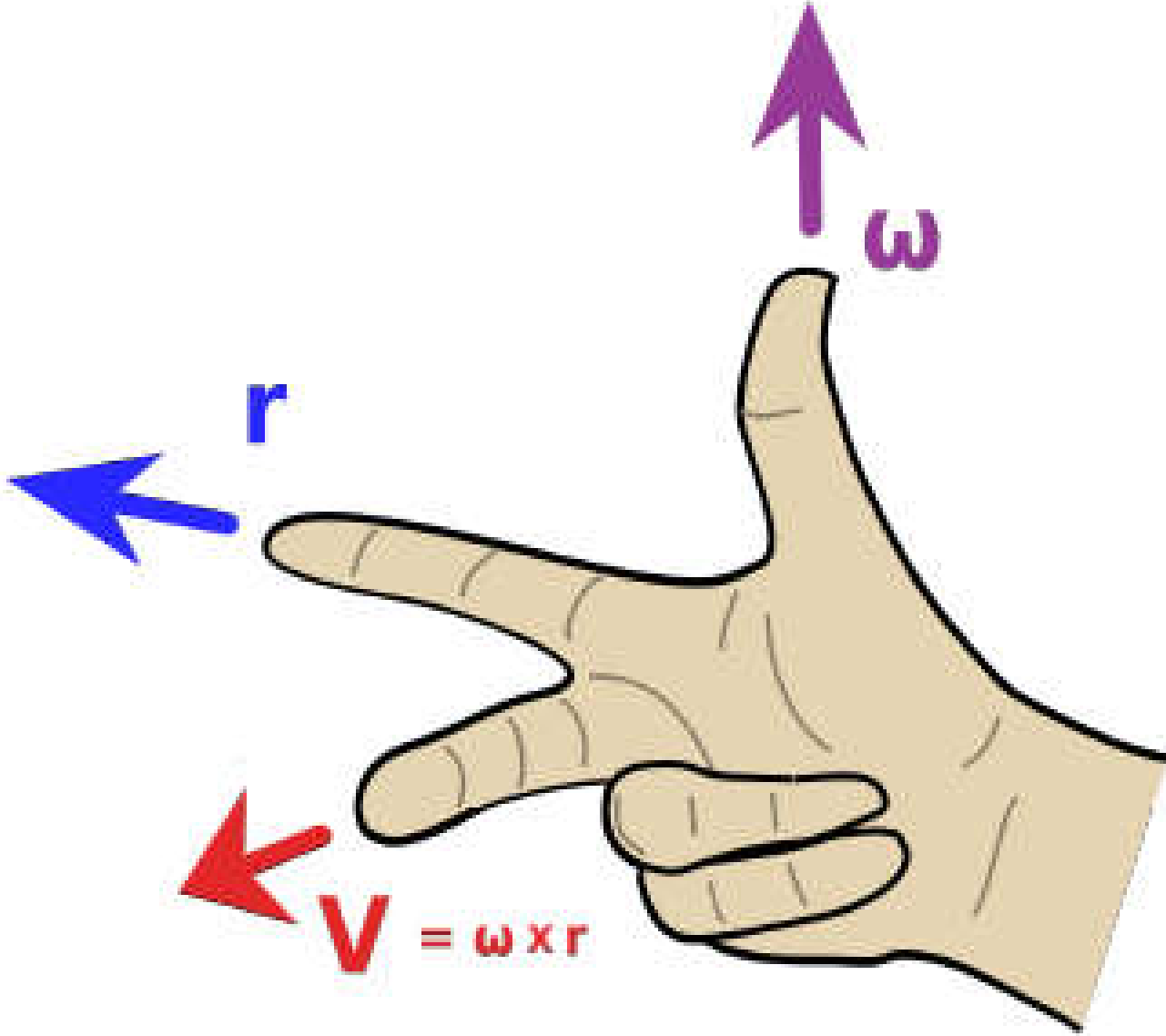
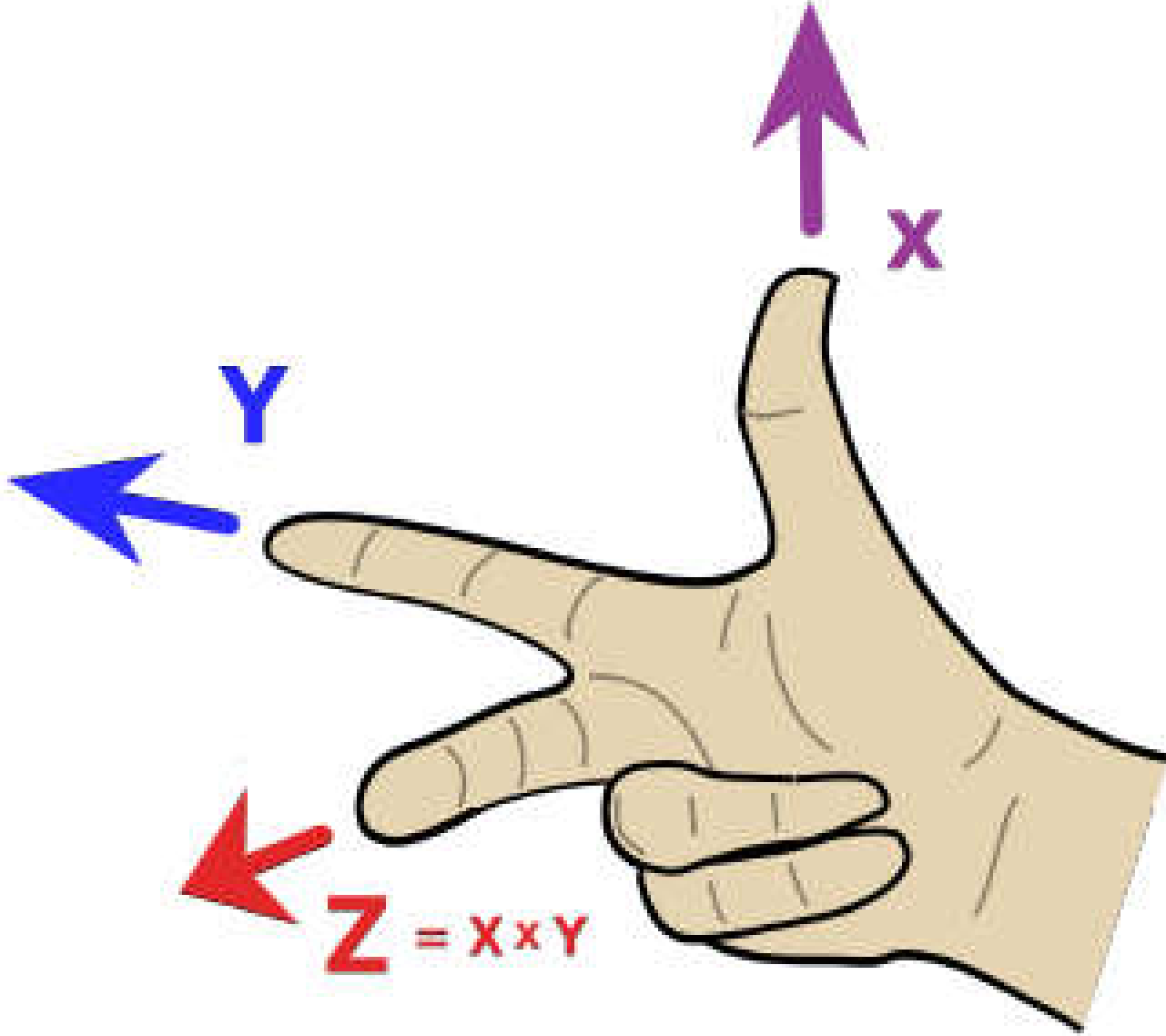
Additionstheoreme

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

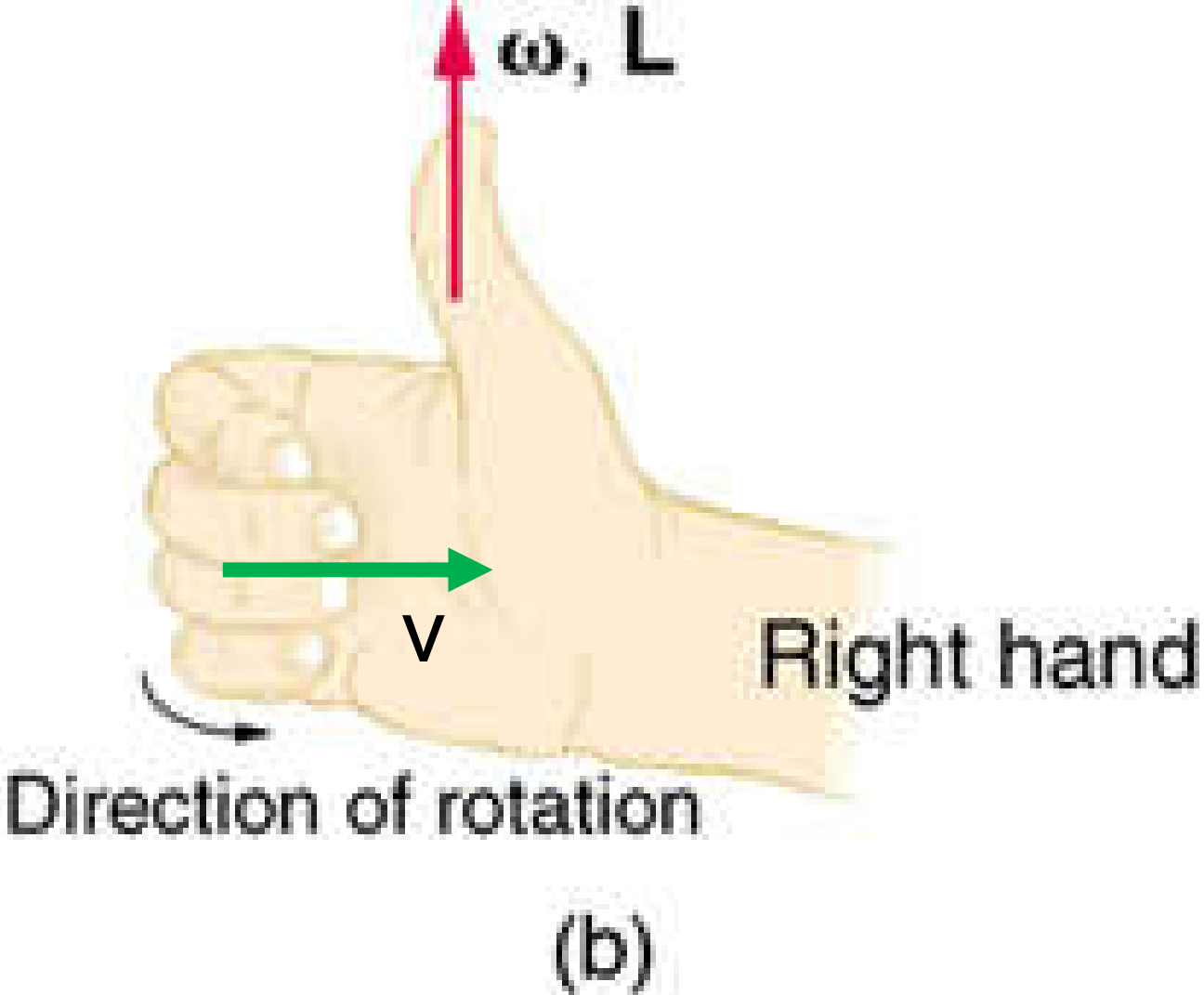
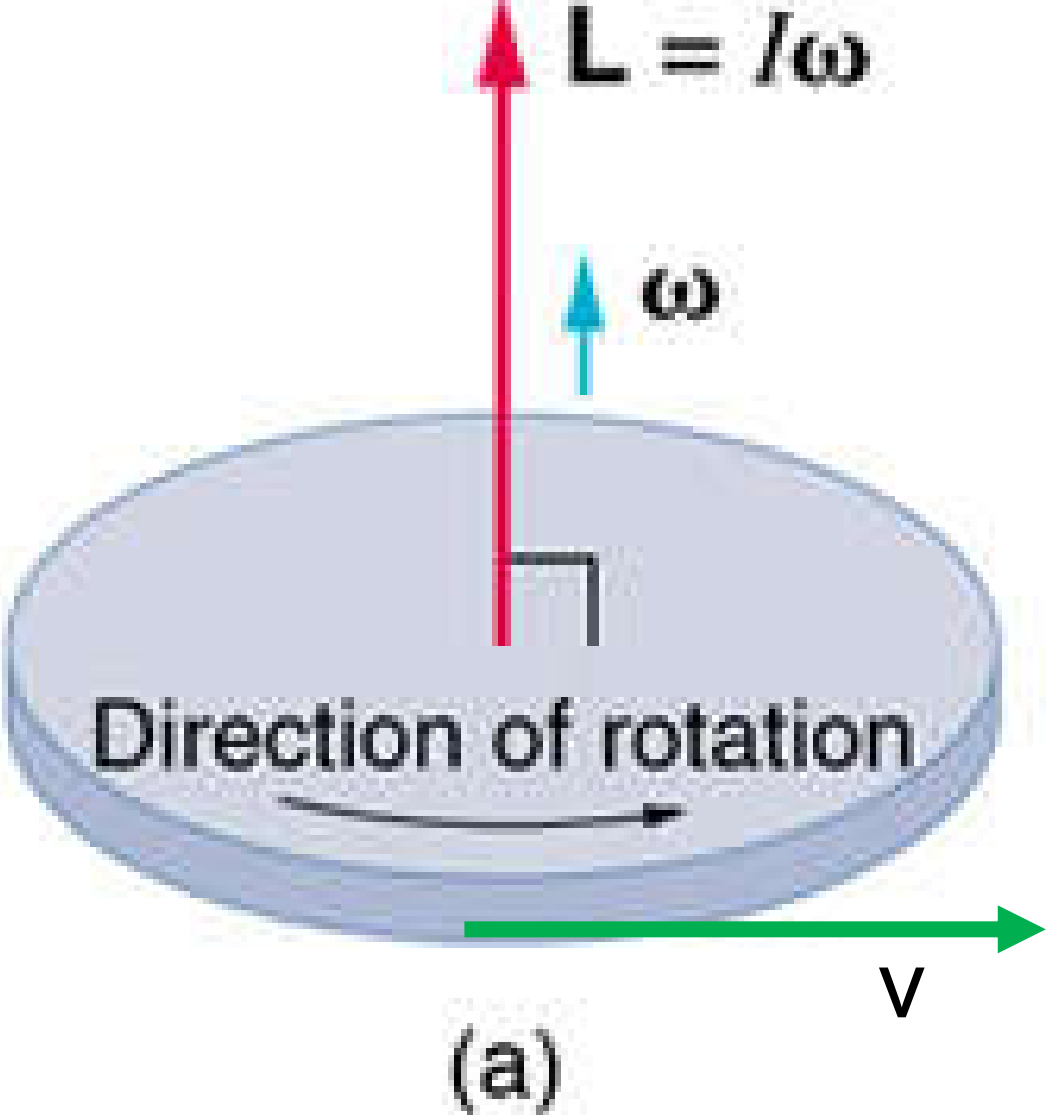
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

# Rechte Hand Regel (RHR)



# Rechte Hand Regel (RHR)





# Newtonsche Gesetze (vereinfacht)

1. Ein kräftefreier Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit.
2. Kraft gleich Masse mal Beschleunigung.
3. Actio-Reactio: Eine Kraft von Körper A auf Körper B geht immer mit einer gleich großen, aber entgegen gerichteten Kraft von Körper B auf Körper A einher.

# Gaussische Fehlerfortpflanzung

### Kinematik

$$\omega = 2\pi f \quad f = 1/T \quad v_T = \frac{v}{r} = r\omega$$

$$a_{zp} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

s, v, a und  $\theta, \omega, \alpha$ : Konstante Linearbeschleunigung oder Winkelbeschleunigung

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$

$$s = s_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{2as - 2as_0 + v_0^2}}{a}$$

Translation + Rotation um eine fixe Achse A

$$\mathbf{s}_P(t) = \mathbf{s}_A(t) + r_{AP}\mathbf{e}_r(t)$$

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_A(t) + r_{AP}\omega(t)\mathbf{e}_\phi(t)$$

$$\mathbf{a}_P(t) = \mathbf{a}_A(t) + r_{AP}\alpha(t)\mathbf{e}_\phi(t) - r_{AP}\omega(t)^2\mathbf{e}_r(t)$$

Gaussische Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f^2 = \left(\frac{\partial f(x,y,z,\dots)}{\partial x}\right)_{x=x_0,y=y_0,\dots}^2 (\Delta x)^2 +$$

$$\left(\frac{\partial f(x,y,z,\dots)}{\partial y}\right)_{x=x_0,y=y_0,\dots}^2 (\Delta y)^2 +$$

$$\left(\frac{\partial f(x,y,z,\dots)}{\partial z}\right)_{x=x_0,y=y_0,\dots}^2 (\Delta z)^2 + \dots$$

### Kinetik

$$\mathbf{P} = M_{sp}\mathbf{v}_{sp} \quad \mathbf{L} = \mathbf{J}\omega = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Schwerpunkt:  $\mathbf{R}_{sp} = \frac{\sum_a m_a \mathbf{r}_a}{\sum_a m_a}$

Trägheitsmoment:  $\mathbf{J}_S = \sum_i m_i \mathbf{r}_{i,S}^2$

Satz von Steiner:  $J_A = J_{SP} + m\mathbf{d}_A^2$

$$E_{kin} = 1/2m\mathbf{v}^2 + 1/2\mathbf{J}\omega^2$$

$$E_{pot} = - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Reibungskraft:  $F_R = -\mu F_n = -\mu \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n$

Federkraft:  $F_F = -k\Delta x$

### Stöße

Gerade, zentral, teilelastisch

$$v'_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 (v_1 - v_2) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 (v_2 - v_1) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta U = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 (1 - C_R^2)$$

$$C = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} \quad \text{mit} \quad 0 \leq C \leq 1$$

### Koordinatensysteme

Polarkoordinaten (r,  $\theta$ )

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \omega \mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\omega \mathbf{e}_r$$

Zylindrische Koordinaten (r,  $\theta$ , z)

$$\mathbf{s}(t) = r(t)\mathbf{e}_r(\theta(t)) + z(t)\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{v} = \dot{s} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + \ddot{\theta}r)\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z$$

Affine Transformation:  $\mathbf{x}_C = [{}^C A_L] \mathbf{x}_L + \mathbf{t}_{L \rightarrow C}$

Elementarrotationen (negativer Drehsinn)

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Kinematische Kette

Freiheitsgrade in 3D:  $M = 6n - \sum_{i=1}^j (6 - f_j)$

Jacobimatrix (z.B. für  $x_1, x_2, x_3$ ):

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Zweikörperkette

$$X_P = l_1 \cos \alpha_1$$

$$Y_P = l_1 \sin \alpha_1$$

$$X_Q = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$Y_Q = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$$

# Gauss'sche Fehlerfortpflanzung

Voneinander unabhängige fehlerbehaftete Größen

Gauss'sche Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f^2 = \left( \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x} \Big|_{x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta x \right)^2 + \left( \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial y} \Big|_{x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta y \right)^2 + \left( \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial z} \Big|_{x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta z \right)^2 + \dots$$

$f$  := Gesuchte Funktion (Energie, Formel,..)

$\Delta x, \Delta y$  := Messfehler

# Beispiel – Gauss'sche Fehlerfortpflanzung

# Kaffeepause

Beginn:

# Übung I – Gauss'sche Fehlerfortpflanzung FS19

Sie messen als Sportwissenschaftler bei den olympischen Spielen die sportliche Leistung der Topathleten in der Startphase beim Sprint. Mittels eines Beschleunigungssensors messen Sie eine konstante Beschleunigung von

$$a = 1.5\text{m/s}^2$$

über einen Zeitraum von

$$t = 7.3\text{s}$$

und bestimmen daraus den zurückgelegten Weg

$$x$$

. Wie gross ist die absolute Messunsicherheit

$$\Delta x$$

wenn die Unsicherheit der Beschleunigungsmessung

$$\Delta a = 0.1\text{m/s}^2$$

und die Unsicherheit der Zeitmessung

$$\Delta t = 0.2\text{s}$$

beträgt?

# Kinematik

## Allgemeine Bewegung, Ebene Bewegung

**Kinematik**

$$\omega = 2\pi f \quad f = 1/T \quad v_T = \frac{v}{r} = r\omega$$

$$a_{zp} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

$s, v, a$  und  $\theta, \omega, \alpha$ : Konstante Linearbeschleunigung oder Winkelbeschleunigung

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$

$$s = s_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{2as - 2as_0 + v_0^2}}{a}$$

Translation + Rotation um eine fixe Achse  $A$

$$\mathbf{s}_P(t) = \mathbf{s}_A(t) + r_{AP} \mathbf{e}_r(t)$$

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_A(t) + r_{AP} \omega(t) \mathbf{e}_\phi(t)$$

$$\mathbf{a}_P(t) = \mathbf{a}_A(t) + r_{AP} \alpha(t) \mathbf{e}_\phi(t) - r_{AP} \omega(t)^2 \mathbf{e}_r(t)$$

Gauss'sche Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f^2 = \left( \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x} \Big|_{x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta x \right)^2 + \left( \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial y} \Big|_{x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta y \right)^2 + \left( \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial z} \Big|_{x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta z \right)^2 + \dots$$

**Stöße**

Gerade, zentral, teilelastisch

$$v'_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 (v_1 - v_2) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 (v_2 - v_1) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta U = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 (1 - C_R^2)$$

$$C = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} \quad \text{mit} \quad 0 \leq C \leq 1$$

**Koordinatensysteme**

Polarkoordinaten  $(r, \theta)$

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \omega \mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\omega \mathbf{e}_r$$

Zylindrische Koordinaten  $(r, \theta, z)$

$$\mathbf{s}(t) = r(t) \mathbf{e}_r(\theta(t)) + z(t) \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{v} = \dot{s} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{z} \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r) \mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + \ddot{\theta} r) \mathbf{e}_\theta + \ddot{z} \mathbf{e}_z$$

Affine Transformation:  $\mathbf{x}_G = [{}^C A_L] \mathbf{x}_L + \mathbf{t}_{L \rightarrow G}$

Elementarrotationen (negativer Drehsinn)

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Kinetik**

$$\mathbf{P} = M_{sp} \mathbf{v}_{sp} \quad \mathbf{L} = \mathbf{J}\omega = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Schwerpunkt:  $\mathbf{R}_{sp} = \frac{\sum_a m_a \mathbf{r}_a}{\sum_a m_a}$

Trägheitsmoment:  $\mathbf{J}_S = \sum_i m_i \mathbf{r}_{i,S}^2$

Satz von Steiner:  $J_A = J_{SP} + m d_A^2$

$$E_{kin} = 1/2 m v^2 + 1/2 \mathbf{J} \omega^2$$

$$E_{pot} = - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Reibungskraft:  $F_R = -\mu F_n = -\mu \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n$

Federkraft:  $F_F = -k \Delta x$

**Kinematische Kette**

Freiheitsgrade in 3D:  $M = 6n - \sum_{i=1}^j (6 - f_j)$

Jacobimatrix (z.B. für  $x_1, x_2, x_3$ ):

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Zweikörperkette

$$X_P = l_1 \cos \alpha_1$$

$$Y_P = l_1 \sin \alpha_1$$

$$X_Q = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$Y_Q = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$$

# Kinematik

$s, v, a$  und  $\theta, \omega, \alpha$ : Konstante Linearbeschleunigung oder Winkelbeschleunigung

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{2as - 2as_0 + v_0^2}}{a}$$



# Übung II - Kinematik

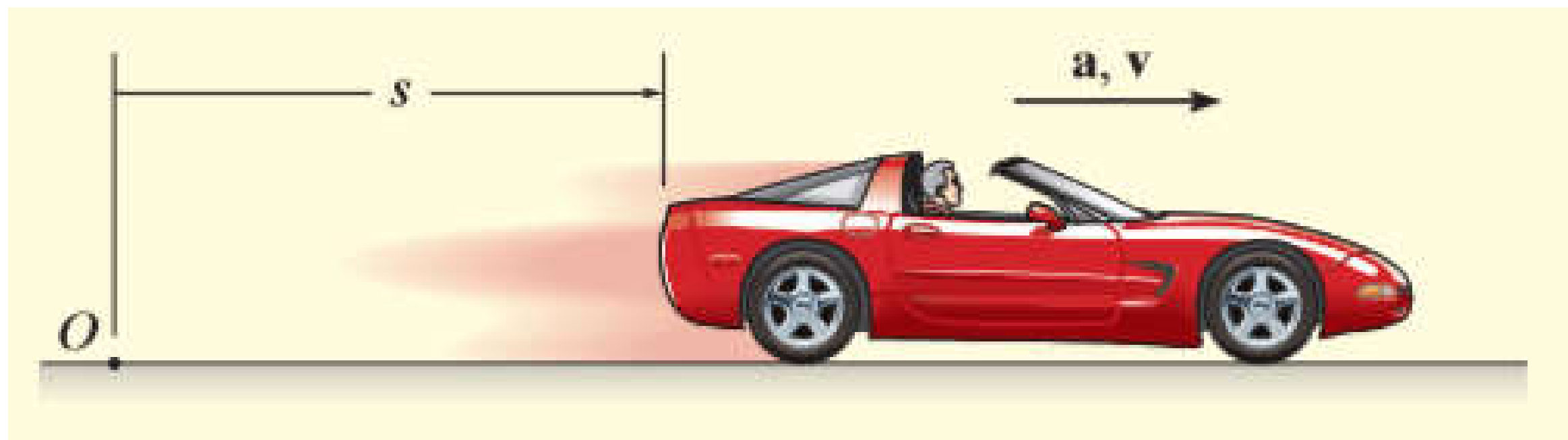
Ein Auto bewegt sich geradlinig, sodass die Geschwindigkeit durch  $v = (3t^2 + 2t) \frac{m}{s}$ , wobei  $t$  Sekunden sind. Bestimme

a) die Position und

b) die Beschleunigung

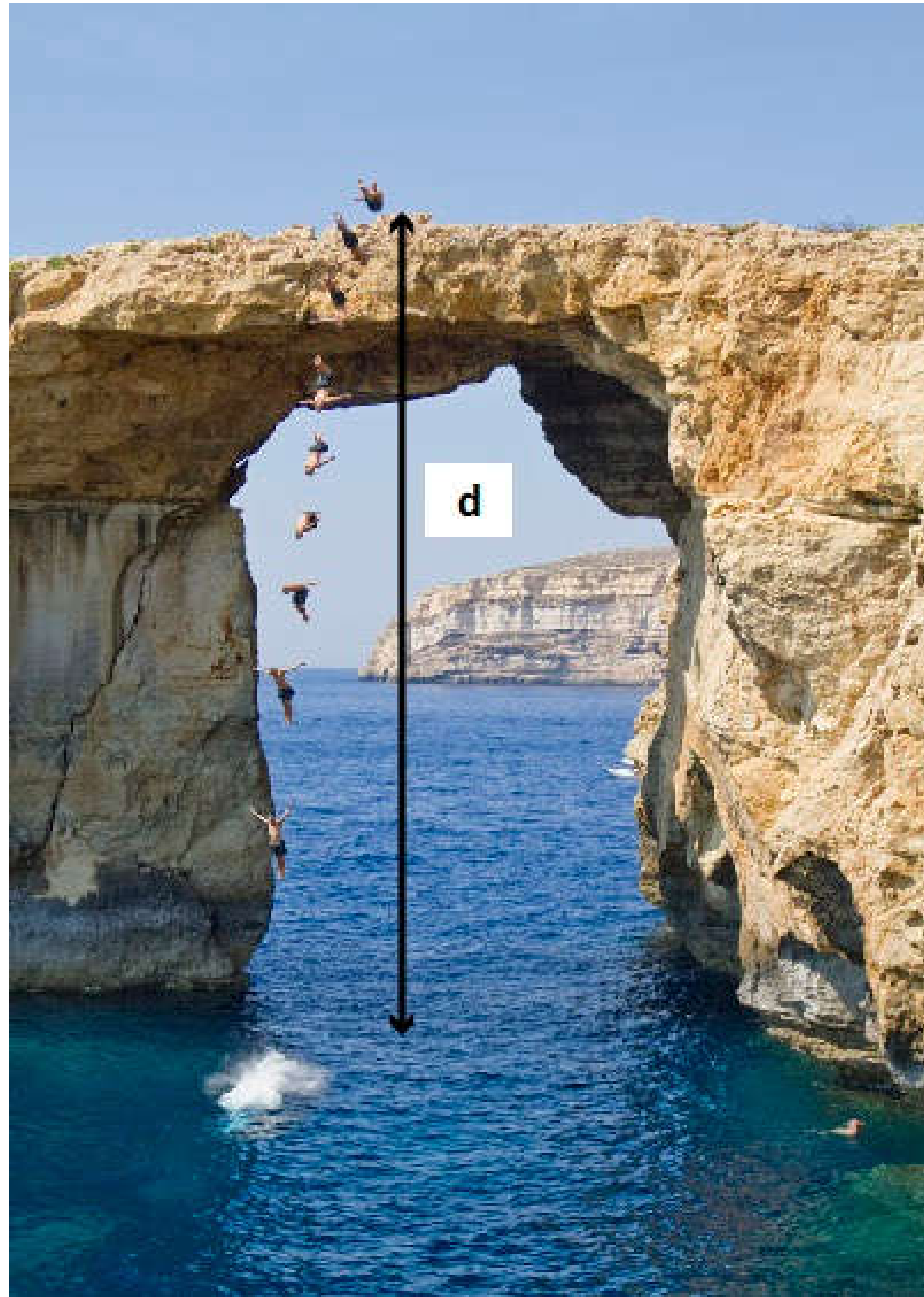
wenn  $t = 3 \text{ s}$ .

Angenommen  $t_0 = 0, s_0 = 0$ .



# Übung III - Kinematik FS18

Ein Klippenspringer springt von einer  $d = 29\text{m}$  hohen Klippe ins Wasser. Mit welcher vertikalen Geschwindigkeit trifft der Klippenspringer aufs Wasser auf? Der Luftwiderstand kann vernachlässigt werden.



# Übung IV – Kinematik FS18

Eine Person ( $m = 80\text{kg}$ ) tritt beim Gehen mit einer Geschwindigkeit von  $v = 3\text{m/s}$  auf den Boden auf. Die Bewegung wird in  $t = 0.5\text{s}$  linear abgebremst.

Berechnen Sie über welche Distanz die Bewegung abgebremst wird.

# 2D Koordinatensysteme

Koordinaten	kartesisch	polar
kartesisch	$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$
polar	$x = r \cos \varphi$ $y = r \sin \varphi$	$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\varphi} \end{pmatrix}$

*KARTESISCH:*

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$$

*Polar*

$$\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho(\varphi(t))$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Polarkoordinaten( $r, \phi$ )

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \omega\mathbf{e}_\phi$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = -\omega\mathbf{e}_r$$

# 3D Koordinatensysteme

Koordinaten	kartesisch	zylindrisch	sphärisch
kartesisch	$v = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ $z = z$	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$ $\psi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$
zylindrisch	$x = \rho \cos \varphi$ $y = \rho \sin \varphi$ $z = z$	$v = \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \rho \dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$	$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ $\theta = \tan^{-1} \frac{\rho}{z}$ $\psi = \varphi$
sphärisch	$x = r \sin \theta \cos \psi$ $y = r \sin \theta \sin \psi$ $z = r \cos \theta$	$\rho = r \sin \theta$ $\varphi = \psi$ $z = r \cos \theta$	$v = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r \dot{\theta} \\ r \sin \theta \dot{\psi} \end{pmatrix}$

**KARTESISCH:**

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

**ZYLINDRISCH:**

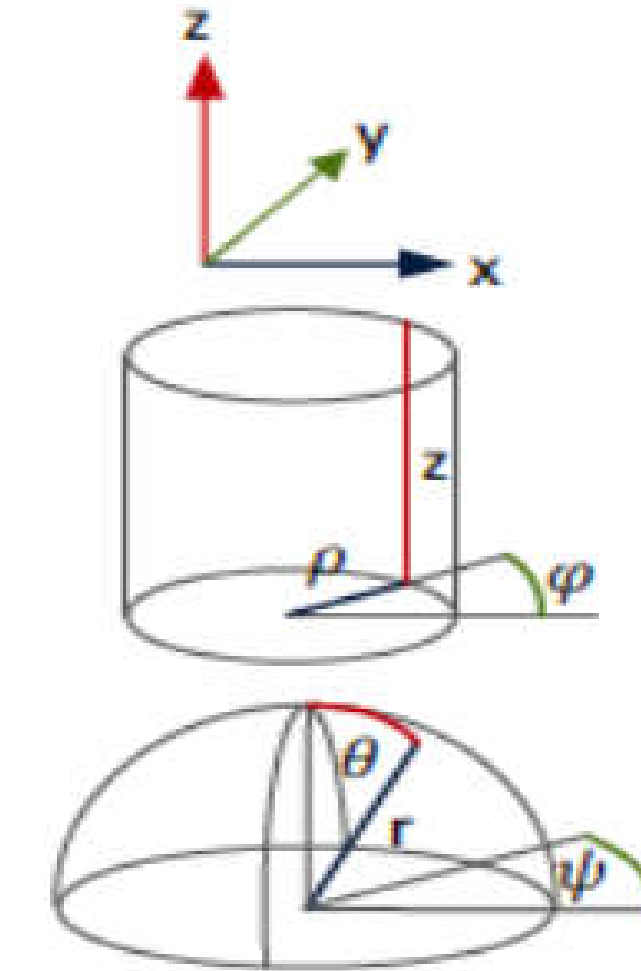
$$\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho(\varphi(t)) + z(t)\vec{e}_z$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$$

**SPHÄRISCH:**

$$\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r(\psi(t), \theta(t))$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\psi}\vec{e}_\psi$$



# Kinematik

Translation + Rotation um eine fixe Achse  $A$

$$\mathbf{s}_P(t) = \mathbf{s}_A(t) + r_{AP}\mathbf{e}_r(t)$$

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_A(t) + r_{AP}\omega(t)\mathbf{e}_\phi(t)$$

$$\mathbf{a}_P(t) = \mathbf{a}_A(t) + r_{AP}\alpha(t)\mathbf{e}_\phi(t) - r_{AP}\omega(t)^2\mathbf{e}_r(0)$$

# Allgemeine Bewegung des starren Körpers (3D)

Die Kinematik beschreibt den Bewegungszustand des starren Körpers

$$\{\underline{\mathbf{v}}_A, \underline{\boldsymbol{\omega}}\} \quad (18)$$

**Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes (ABBA)**

$$\underline{\mathbf{v}}_A = \underline{\mathbf{v}}_B + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\mathbf{BA}} = \begin{pmatrix} v_{bx} \\ v_{by} \\ v_{bz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix} \quad (19)$$

Eine momentane Bewegung im Raum ist wie erwähnt entweder

- eine **Translation** (4.2), falls  $\underline{\boldsymbol{\omega}} = 0$  ist,
- eine **Rotation** (4.3), falls  $\underline{\boldsymbol{\omega}} \neq 0$  und  $\underline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_B = 0$  ist oder
- eine **Schraubung**, falls  $\underline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_B \neq 0$  ist.

# Kaffeepause

Beginn:



# Übung V – Kinematik FS18

$A$  fährt mit dem Citybike (Durchmesser  $d_A = 60\text{cm}$ ), tritt mit einer Winkelgeschwindigkeit von  $\omega_A = 1.8\pi/s$  und einem Gangverhältnis von  $48/18$ .  $B$  begleitet ihn auf einem Mountainbike (Durchmesser  $d = 66\text{cm}$ ) und tritt mit einer Winkelgeschwindigkeit von  $\omega_B = 2.0\pi/s$ .

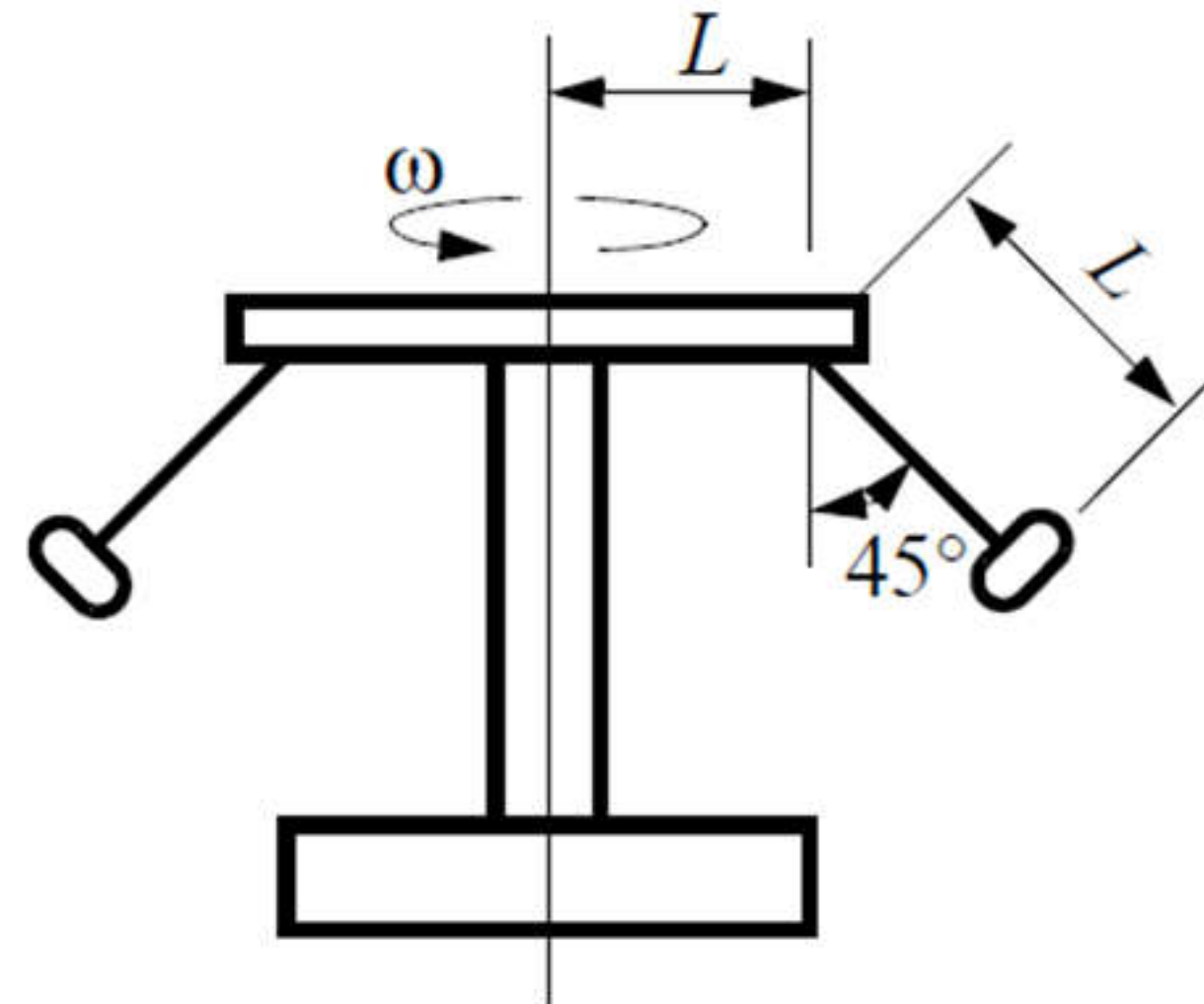
Wenn  $B$ 's Gangverhältnis  $44/X$  ist, wie gross muss  $X$  gewählt werden, um mit der gleichen Geschwindigkeit zu fahren wie  $A$ ?

# Kinematik

$$\omega = 2\pi f \quad f = 1/T \quad v_T = \frac{U}{T} = r\omega$$
$$a_{zp} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

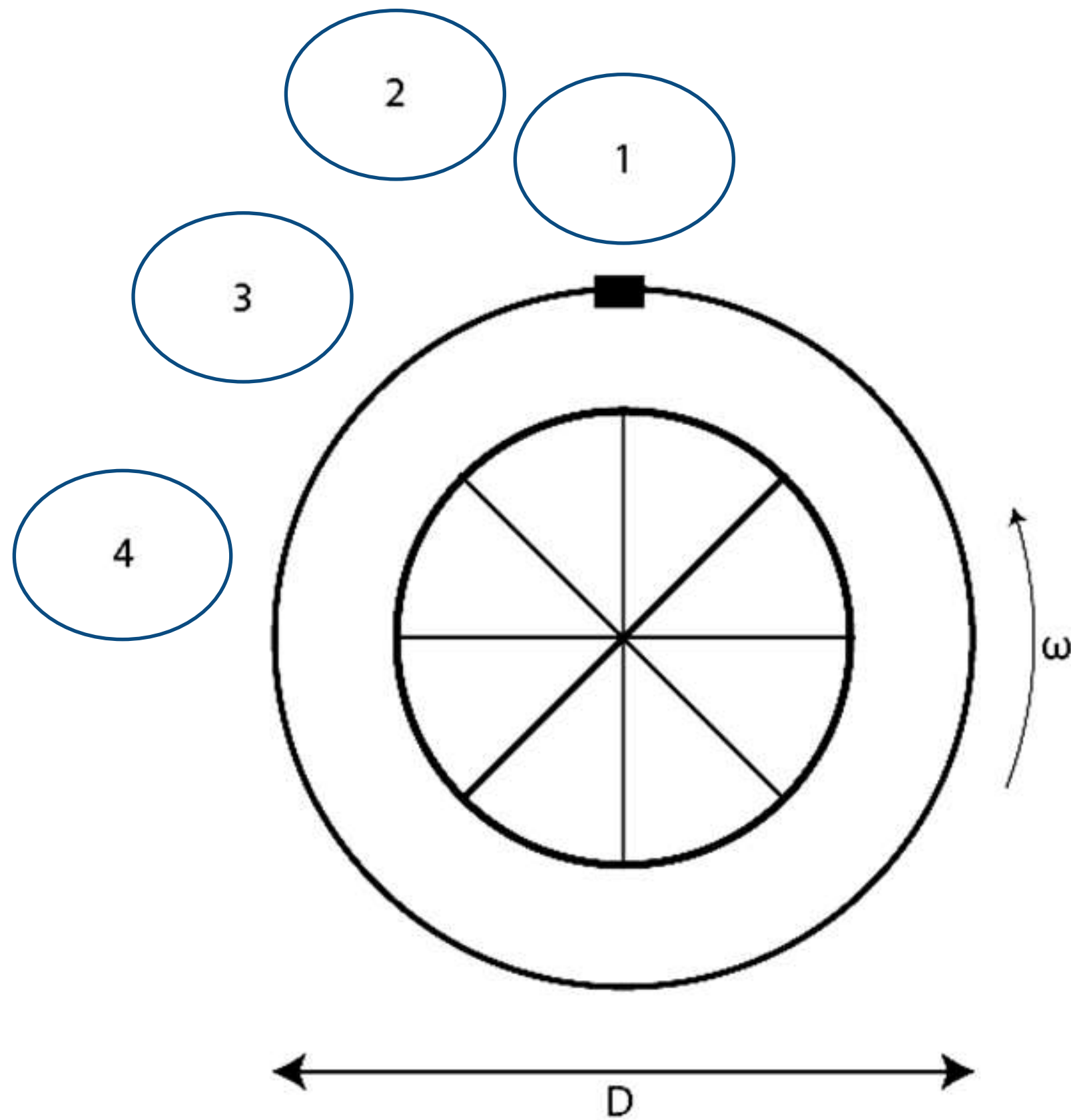
# Übung VI – Kinematik

Das im Bild dargestellte Karussell dreht mit der Rotationsgeschwindigkeit  $\omega$ .  
Wie gross ist die Schnelligkeit der Sessel?



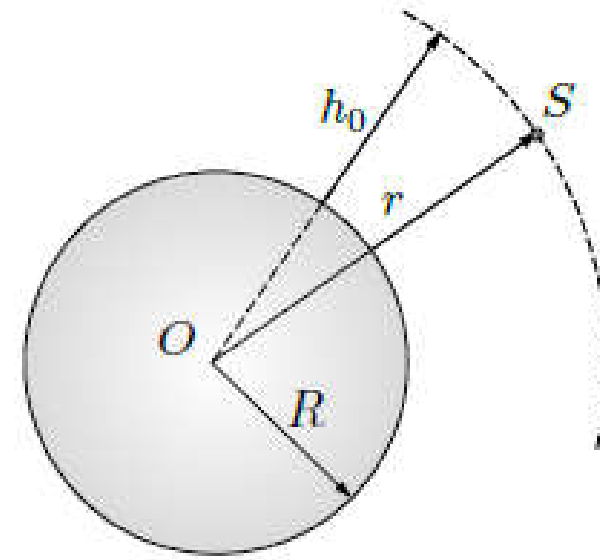
# Übung VII – Kinematik

Astrid fährt im Jahrmarkt in einem Karussell. Während der Fahrt gleitet ihr Portemonnaie aus ihrer Tasche (Ort gekennzeichnet durch das schwarze Rechteck). In welchem der Areale müssen sie ihr Portemonnaie nach der Fahrt suchen?



# Übung VIII – Kinematik

**Problem 6** A satellite moves on a circular trajectory of radius  $r$  around the Earth with radial acceleration  $a_r = -g\frac{R^2}{r^2}$ , where  $R$  is the radius of the Earth. The speed of the satellite is constant and denoted by  $v_0$ .



1. What is the height  $h_0$  of the trajectory, measured from the surface of the Earth?

(a)  $h_0 = \frac{gR^2}{v_0^2}$

(b)  $h_0 = g \left( \frac{R}{v_0} - 1 \right)$

(c)  $h_0 = R \left( \frac{gR}{v_0^2} - 1 \right)$

(d)  $h_0 = \sqrt{2}R \left( \frac{gR}{2v_0^2} - 1 \right)$

(e)  $h_0 = R \left( \frac{gR}{v_0} - 2 \right)$

2. How much time  $T$  does it take for the satellite to complete one complete round?

(a)  $T = g \frac{\pi R^2}{3v_0^3}$

(b)  $T = g \frac{3\pi R^2}{4v_0^3}$

(c)  $T = g \frac{2\pi R^2}{v_0^3}$

(d)  $T = g \frac{2\pi R}{v_0^2}$

(e)  $T = g \frac{2\pi R^4}{3v_0^3}$

# Affine Transformationen

## Koordinatensysteme

### Kinematik

$$\omega = 2\pi f \quad f = 1/T \quad v_T = \frac{v}{r} = r\omega$$

$$a_{zp} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

$s, v, a$  und  $\theta, \omega, \alpha$ : Konstante Linearbeschleunigung oder Winkelbeschleunigung

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$

$$s = s_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{2as - 2as_0 + v_0^2}}{a}$$

Translation + Rotation um eine fixe Achse  $A$

$$\mathbf{s}_P(t) = \mathbf{s}_A(t) + r_{AP} \mathbf{e}_r(t)$$

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_A(t) + r_{AP} \omega(t) \mathbf{e}_\phi(t)$$

$$\mathbf{a}_P(t) = \mathbf{a}_A(t) + r_{AP} \alpha(t) \mathbf{e}_\phi(t) - r_{AP} \omega(t)^2 \mathbf{e}_r(t)$$

Gauss'sche Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f^2 = \left( \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x} \Big|_{x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta x \right)^2 +$$

$$\left( \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial y} \Big|_{x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta y \right)^2 +$$

$$\left( \frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial z} \Big|_{x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta z \right)^2 + \dots$$

### Kinetik

$$\mathbf{P} = M_{sp} \mathbf{v}_{sp} \quad \mathbf{L} = \mathbf{J}\omega = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Schwerpunkt:  $\mathbf{R}_{sp} = \frac{\sum_a m_a \mathbf{r}_a}{\sum_a m_a}$

Trägheitsmoment:  $\mathbf{J}_S = \sum_i m_i \mathbf{r}_{i,S}^2$

Satz von Steiner:  $J_A = J_{SP} + m d_A^2$

$$E_{kin} = 1/2 m v^2 + 1/2 J \omega^2$$

$$E_{pot} = - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Reibungskraft:  $F_R = -\mu F_n = -\mu \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n$

Federkraft:  $F_F = -k \Delta x$

### Stöße

Gerade, zentral, teilelastisch

$$v'_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 (v_1 - v_2) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 (v_2 - v_1) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta U = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 (1 - C_R^2)$$

$$C = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} \quad \text{mit} \quad 0 \leq C \leq 1$$

### Koordinatensysteme

Polarkoordinaten  $(r, \theta)$

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \omega \mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\omega \mathbf{e}_r$$

Zylindrische Koordinaten  $(r, \theta, z)$

$$\mathbf{s}(t) = r(t) \mathbf{e}_r(\theta(t)) + z(t) \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{v} = \dot{s} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{z} \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r) \mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + \ddot{\theta} r) \mathbf{e}_\theta + \ddot{z} \mathbf{e}_z$$

Affine Transformation:  $\mathbf{x}_G = [{}^C A_L] \mathbf{x}_L + \mathbf{t}_{L \rightarrow G}$

Elementarrotationen (negativer Drehsinn)

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Kinematische Kette

Freiheitsgrade in 3D:  $M = 6n - \sum_{i=1}^j (6 - f_j)$

Jacobimatrix (z.B. für  $x_1, x_2, x_3$ ):

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Zweikörperkette

$$X_P = l_1 \cos \alpha_1$$

$$Y_P = l_1 \sin \alpha_1$$

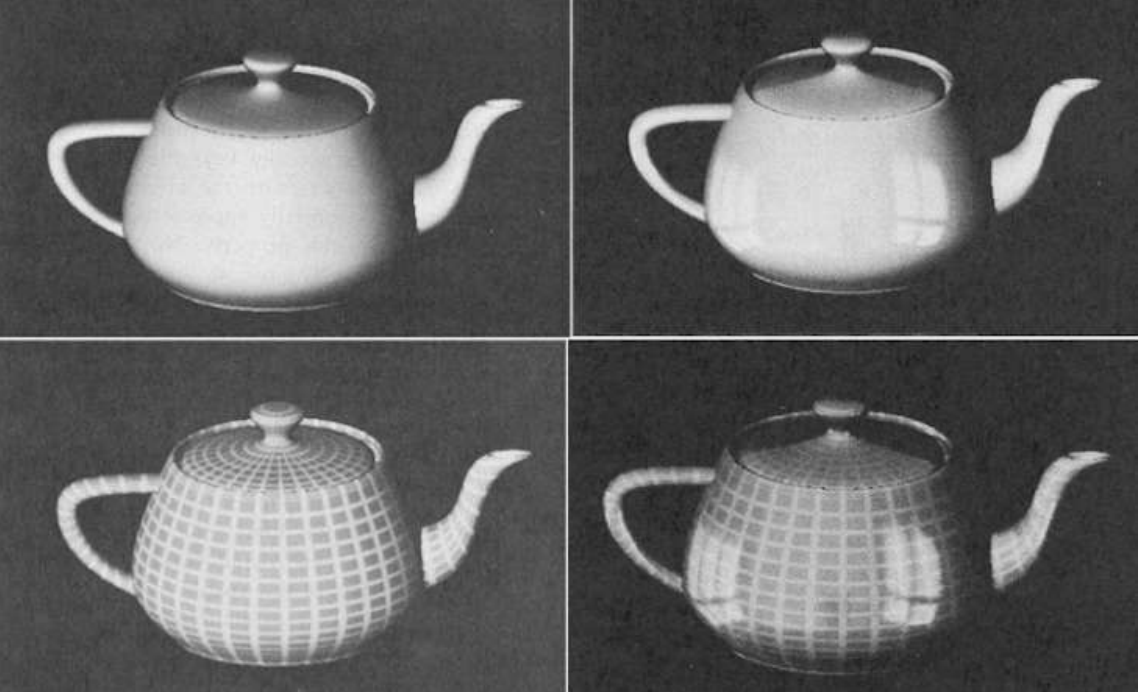
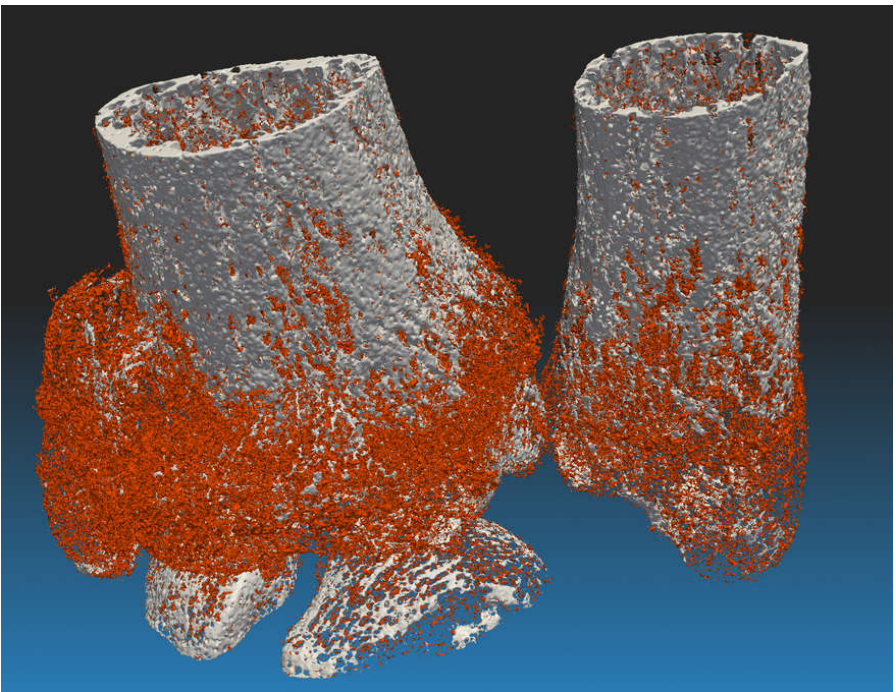
$$X_Q = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$Y_Q = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$$

# Affine Abbildung (Transformation)

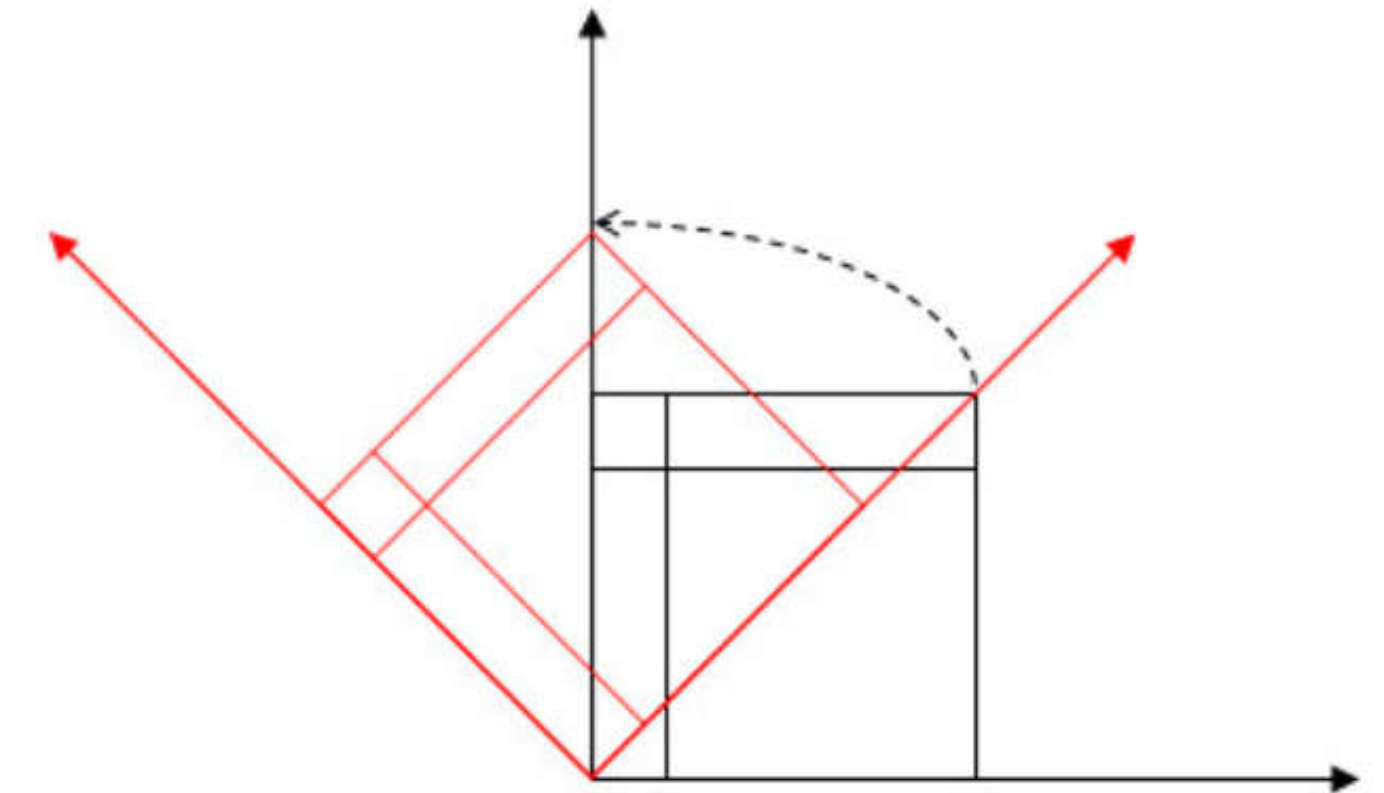
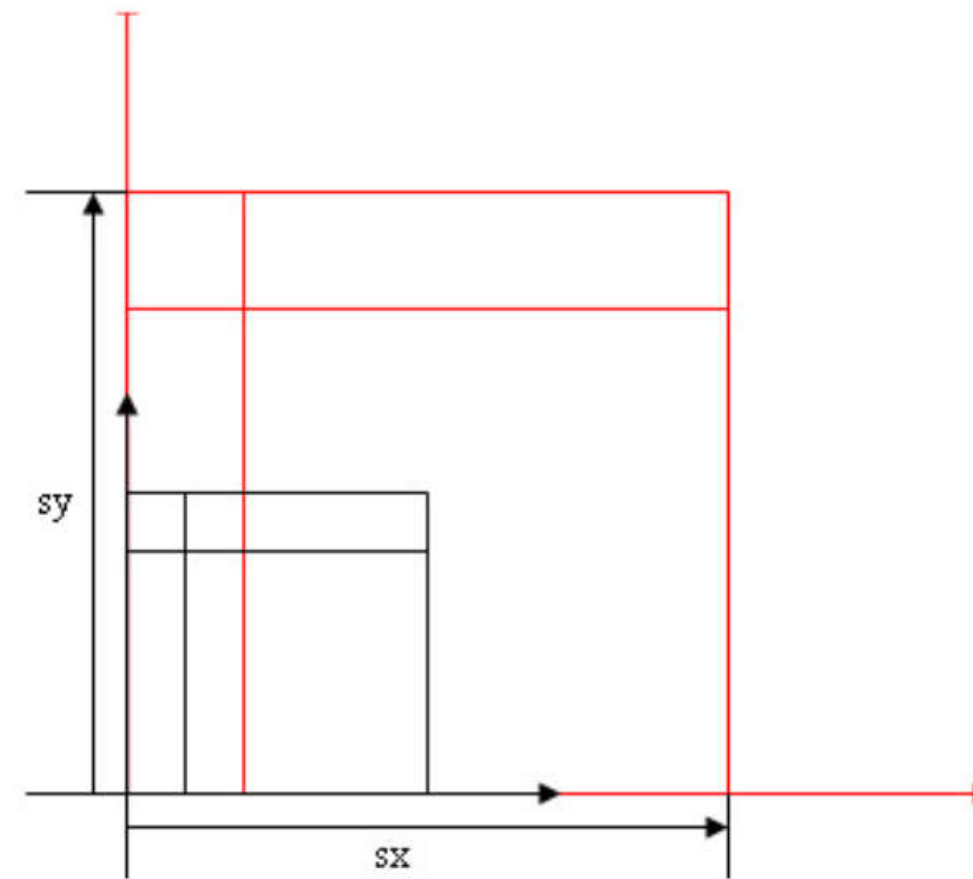
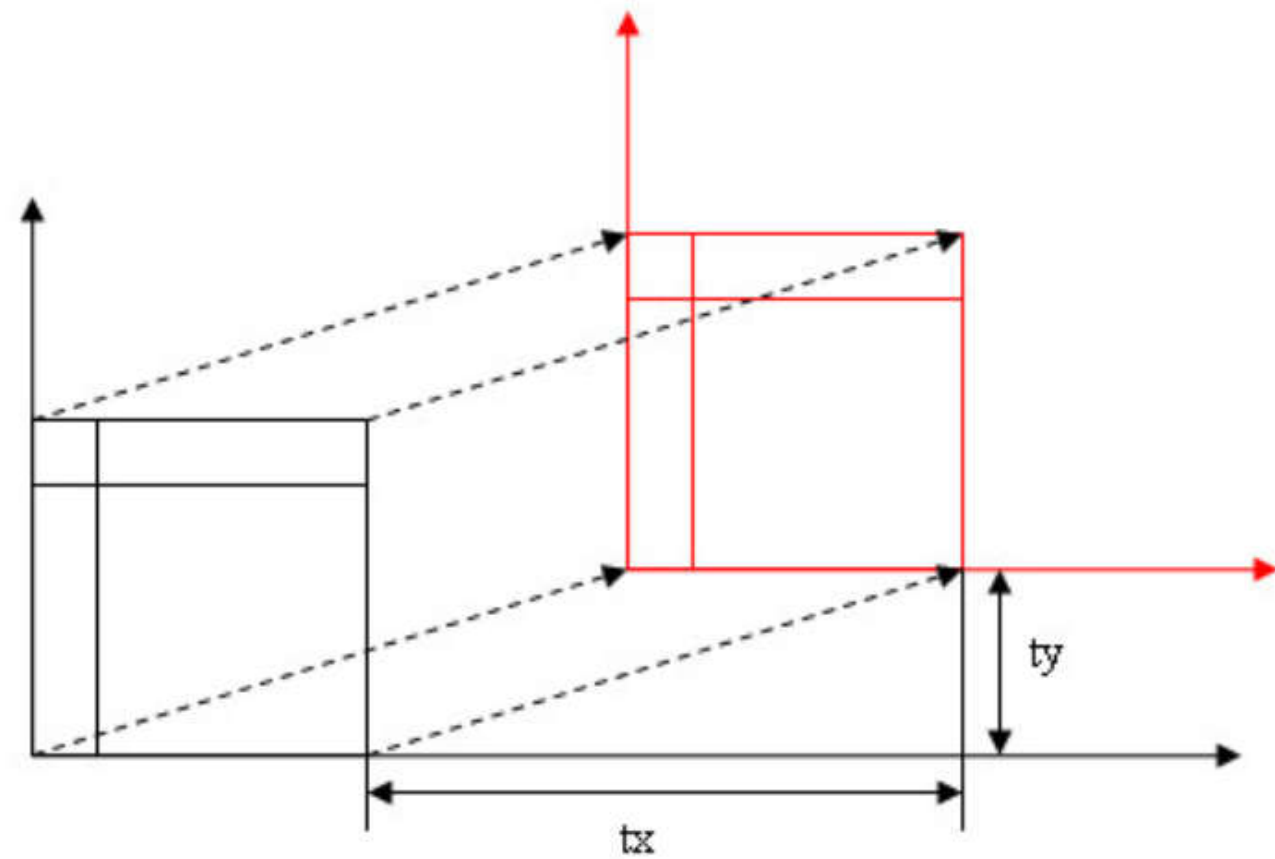
Affine Transformation:  $\mathbf{x}_G = [{}^G A_L] \mathbf{x}_L + \mathbf{t}_{L \rightarrow G}$

Labels: Transformierter Vektor, Rotationsmatrix, Gegebener Vektor, Translationsvektor



# Affine Abbildung (Transformation)

- eine Abbildung zwischen zwei affinen Räumen, bei der Kollinearität, Parallelität und Teilverhältnisse bewahrt bleiben oder gegenstandslos werden

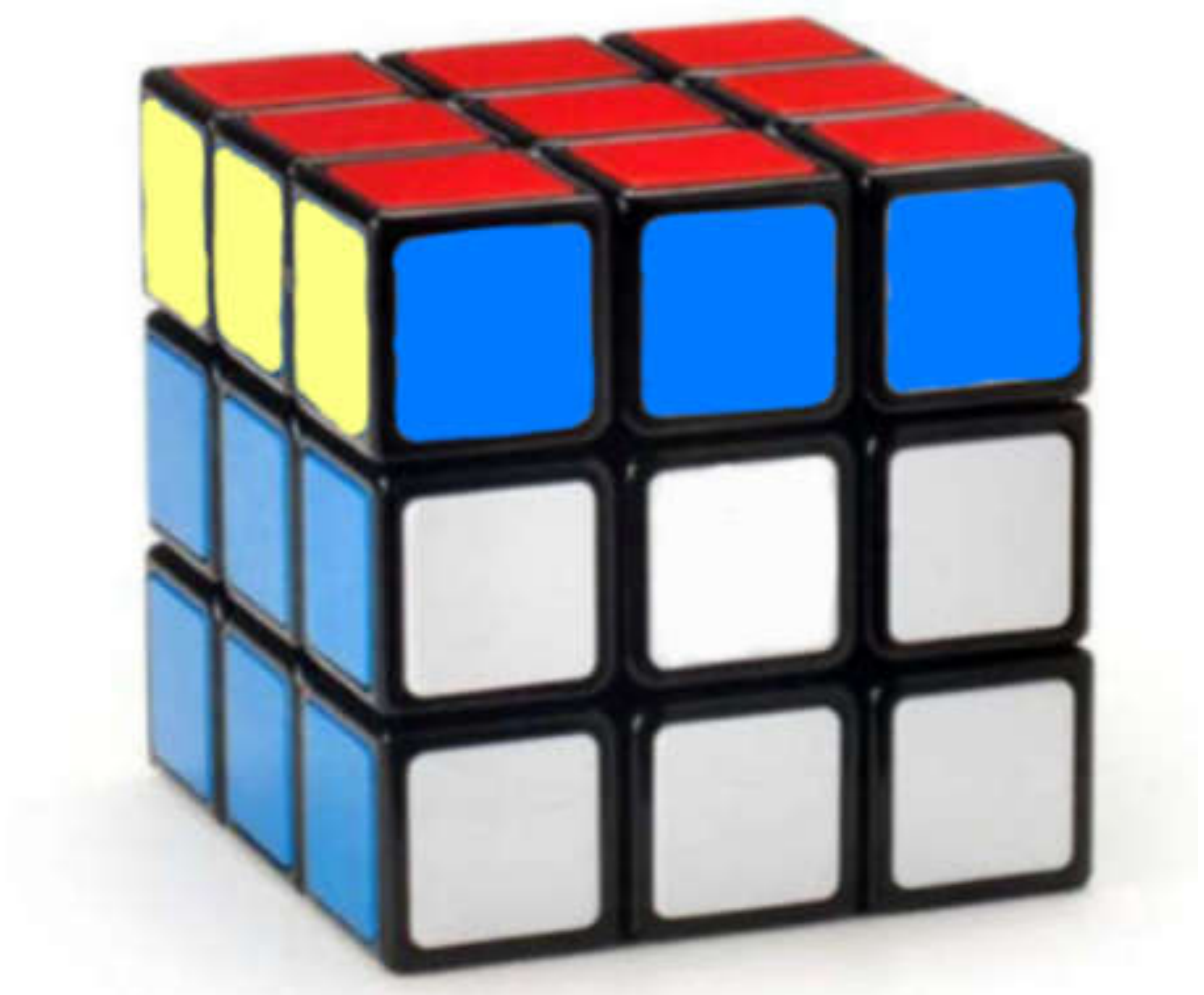
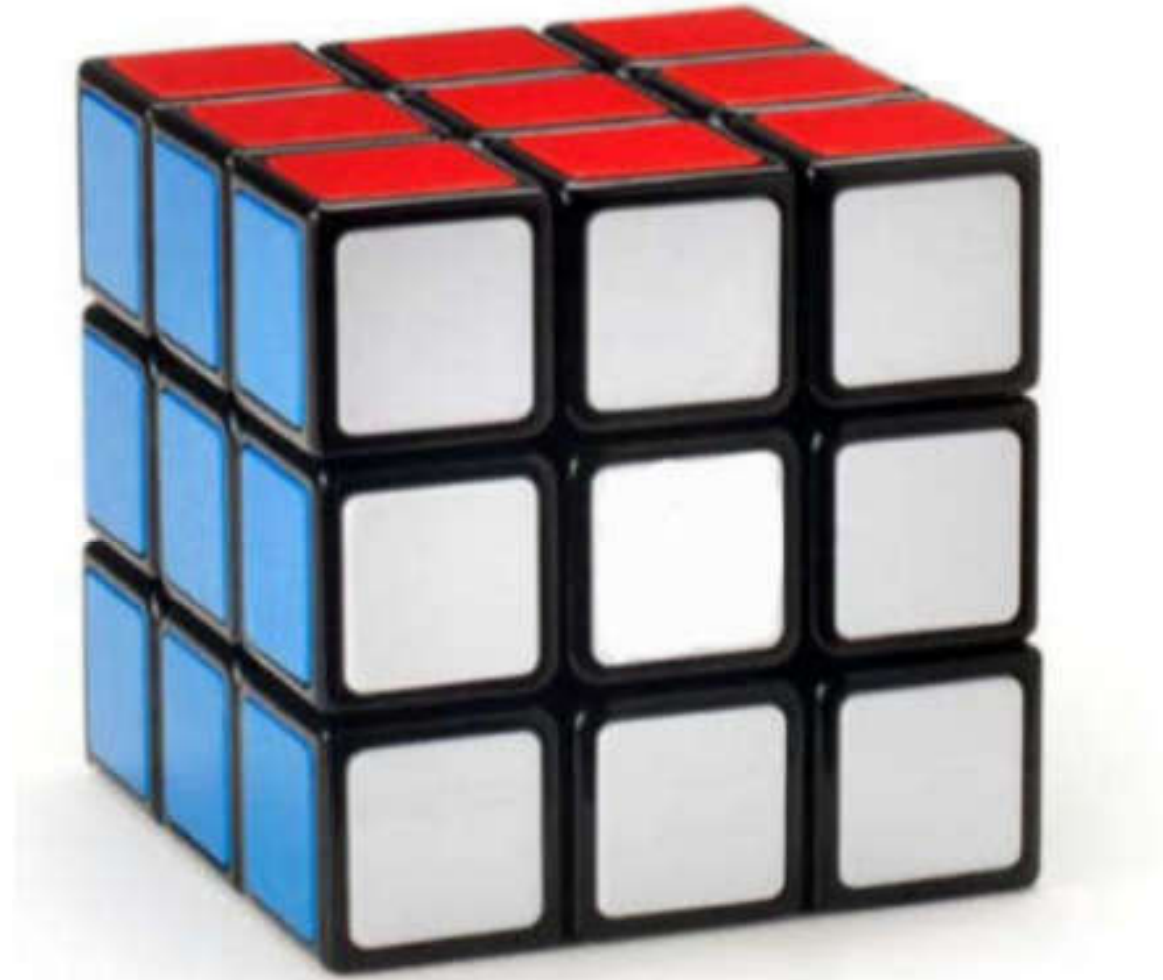




# Kaffeepause

Beginn:

# Transformationen - Rotationen



# Koordinatentransformationen

## Euler- und Kardanwinkel

Elementarrotationen (negativer Drehsinn):

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resultierende Rotationsmatrix der Kardansequenz ( $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ):

$$[{}^G\mathbf{R}_L] = [R_z][R_y][R_x]$$

Resultierende Rotationsmatrix der Eulersequenz ( $\vec{z}, \vec{y}, \vec{z}$ ):

$$[{}^G\mathbf{R}_L] = [R_{z2}][R_y][R_{z1}]$$

Achtung Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ:  $A * B \neq B * A$

# Koordinatentransformationen – Real World/Wiki/Givens

A basic rotation (also called elemental rotation) is a rotation about one of the axes of a coordinate system. The following three basic rotation matrices rotate vectors by an angle  $\theta$  about the  $x$ -,  $y$ -, or  $z$ -axis, in three dimensions, using the [right-hand rule](#)—which codifies their alternating signs. (The same matrices can also represent a clockwise rotation of the axes.<sup>[nb 1]</sup>)

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

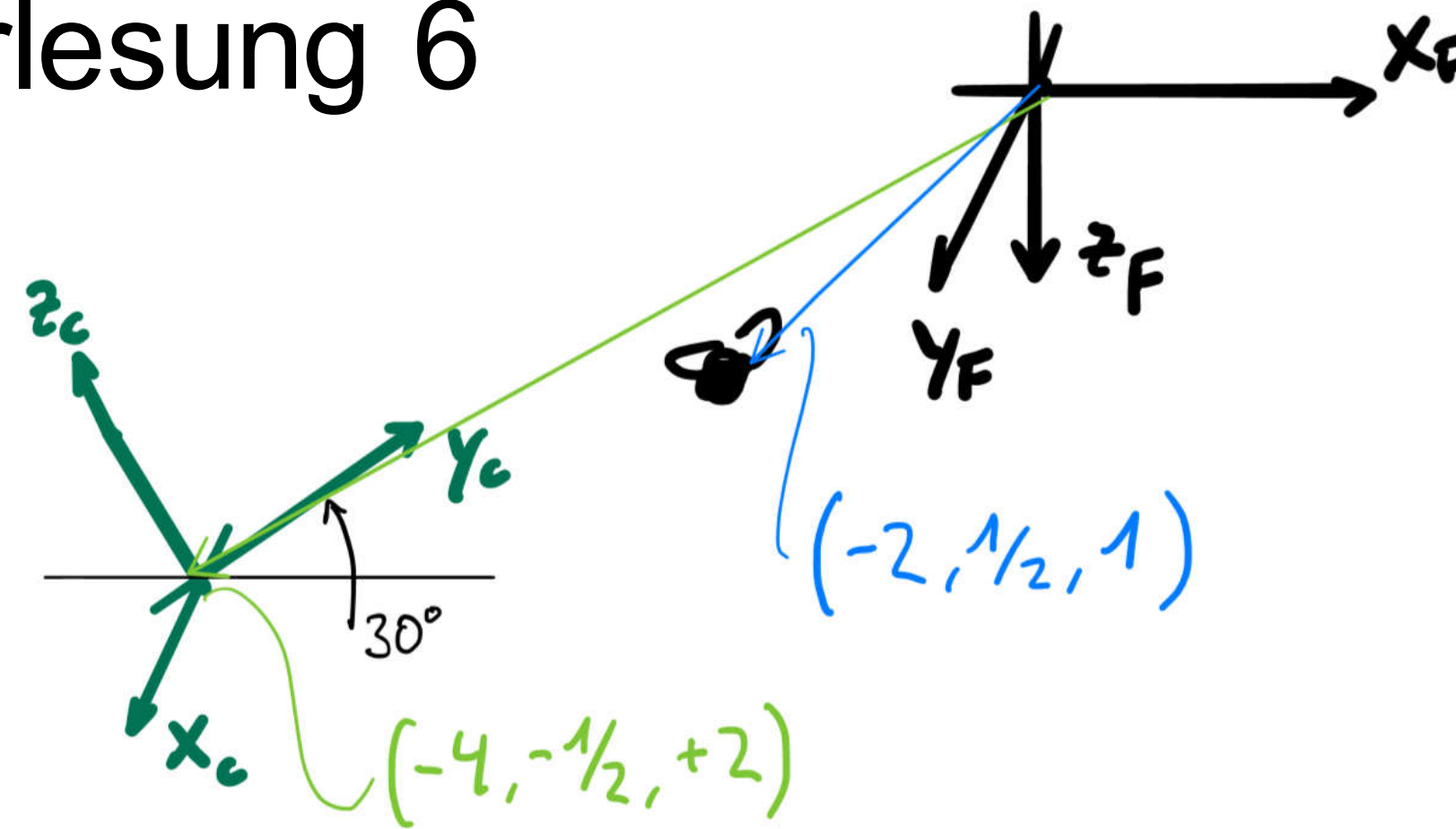
$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

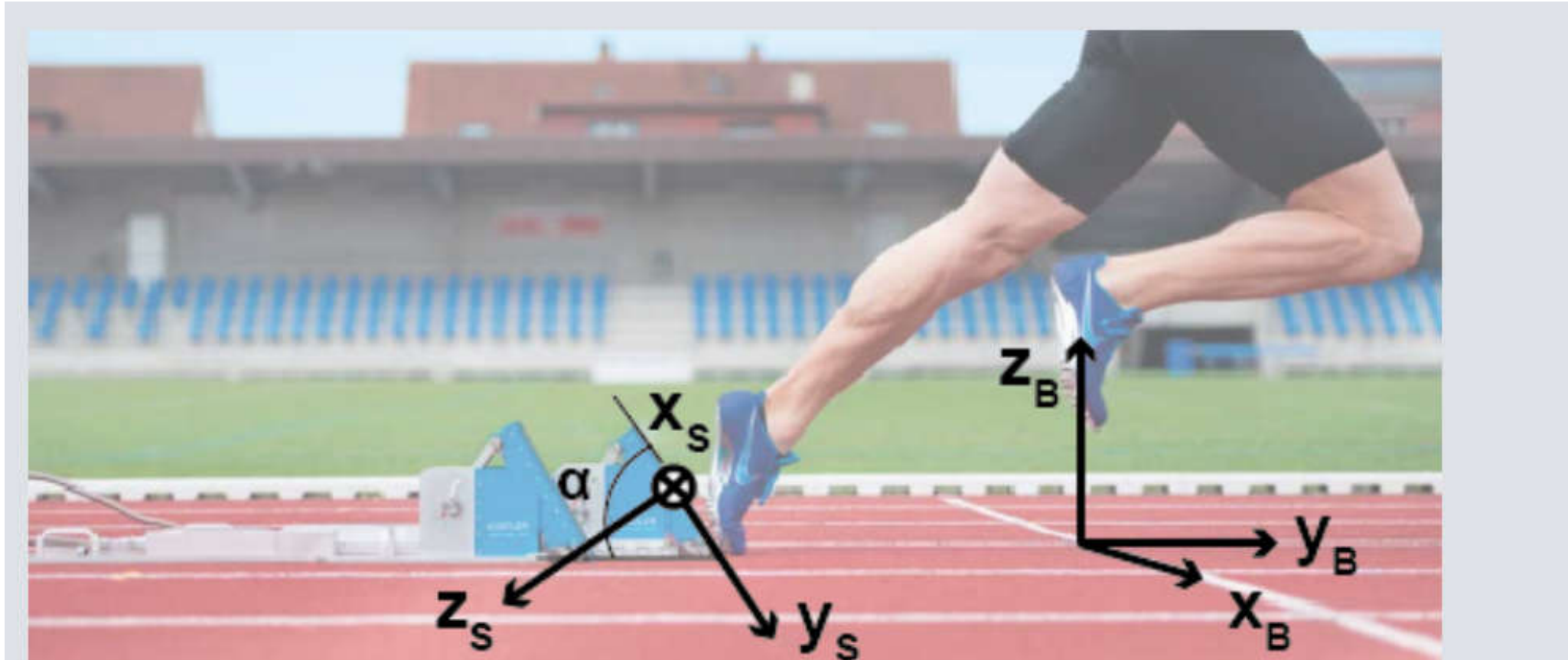
[https://en.wikipedia.org/wiki/Davenport\\_chained\\_rotations](https://en.wikipedia.org/wiki/Davenport_chained_rotations)

# Übung VIII – Clicker Vorlesung 6

Eine Fledermaus ortet die Fliege in ihrem Koordinatensystem (KS) auf Position  $X_F = -2, Y_F = 0.5, Z_F = 1$  und den Kopf des Chamäleons auf  $X_F = -4, Y_F = -0.5, Z_F = 2$ .  
An welche Position muss das Chamäleon in seinem KS zielen um die Fliege zu erwischen?



# Übung IX – Transformationen FS18



Der instrumentierte Startblock misst die Kräfte im Startblockkoordinatensystem

$$(x_S, y_S, z_S)$$

. Der Anstellwinkel des Startblocks beträgt

$$\alpha = 60^\circ$$

. Das Bahnkoordinatensystem

$$(x_B, y_B, z_B)$$

befindet sich auf der Startline. Beide Koordinatensysteme sind orthogonal und

$$x_S$$

und

$$x_B$$

zeigen in entgegengesetzte Richtungen.

# Übung X - Matrixtransformationen

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 5 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Einschub:

## A Joint Coordinate System for the Clinical Description of Three-Dimensional Motions: Application to the Knee

<https://doi.org/10.1115/1.3138397>

Describe the motion of the knee joint

Purpose:

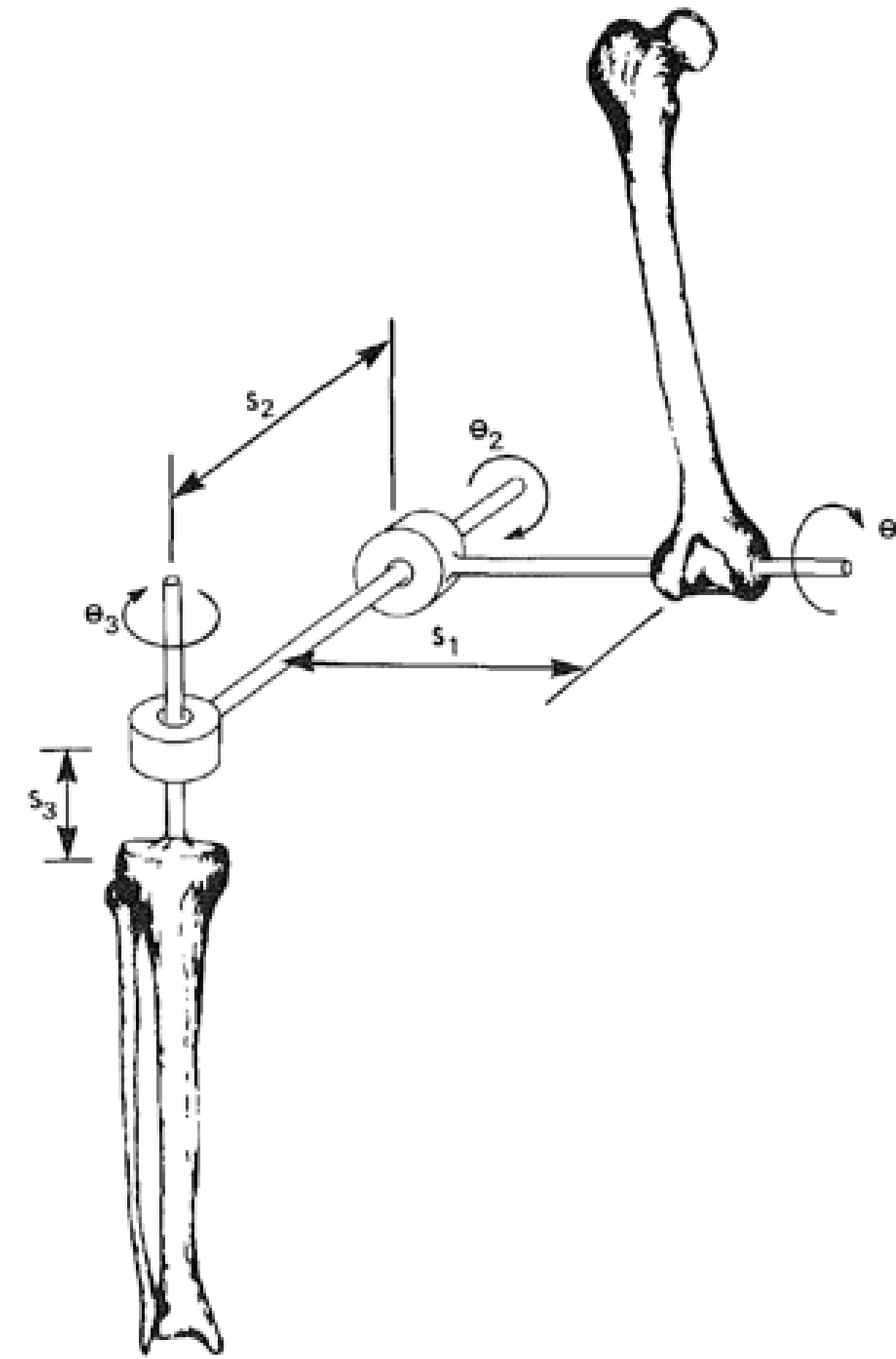
- ensure that all three rotations have functional meaning for the knee

How is it different than cardan/Euler rotations?

- NOT an orthogonal system
- Two segment-fixed axes and a FLOATING axis

Essentially, we must define the anatomical axes of interest from bony markers, the clinical axes of rotation, and the origin of the joint coordinate system for a complete analysis of motion

→ One of many ways to quantify motion of two rigid bodies





# Übung – Speerwurf (Serie 7.5)

Ein Athlet wirft seinen Speer, den wir als Massenpunkt betrachten, aus der Handhöhe von  $h = 2.40$  m mit einer Geschwindigkeit von  $v = 30$  m/s und einem Winkel von  $45^\circ$  ab ( $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>).

- (a) Wie weit wirft der Athlet?
- (b) Wie wird die Bahnkurve des Speeres in den kartesischen Koordinatensystemen beschrieben (Vektorielle Bahngleichung)?
- (c) Der Trainer des Athleten steht am Spielfeldrand und betrachtet den Wurf aus einem Winkel von  $60^\circ$  (Drehung in y-Richtung).
  1. Wie lautet die gesuchte Rotationsmatrix?
  2. Wie sieht die Bahnkurve aus Sicht des Trainers aus?

# Kaffeepause

Beginn:

# Kinematische Kette

### Kinematik

$$\omega = 2\pi f \quad f = 1/T \quad v_T = \frac{v}{r} = r\omega$$

$$a_{zp} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

s, v, a und  $\theta, \omega, \alpha$ : Konstante Linearbeschleunigung oder Winkelbeschleunigung

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$

$$s = s_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{2as - 2as_0 + v_0^2}}{a}$$

Translation + Rotation um eine fixe Achse A

$$\mathbf{s}_P(t) = \mathbf{s}_A(t) + r_{AP}\mathbf{e}_r(t)$$

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_A(t) + r_{AP}\omega(t)\mathbf{e}_\phi(t)$$

$$\mathbf{a}_P(t) = \mathbf{a}_A(t) + r_{AP}\alpha(t)\mathbf{e}_\phi(t) - r_{AP}\omega(t)^2\mathbf{e}_r(t)$$

Gauss'sche Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f^2 = \left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x}\right)_{|x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta x)^2 +$$

$$\left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial y}\right)_{|x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta y)^2 +$$

$$\left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial z}\right)_{|x=x_0, y=y_0, \dots} \Delta z)^2 + \dots$$

### Kinetik

$$\mathbf{P} = M_{sp}\mathbf{v}_{sp} \quad \mathbf{L} = \mathbf{J}\omega = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Schwerpunkt:  $\mathbf{R}_{sp} = \frac{\sum_a m_a \mathbf{r}_a}{\sum_a m_a}$

Trägheitsmoment:  $\mathbf{J}_S = \sum_i m_i \mathbf{r}_{i,S}^2$

Satz von Steiner:  $J_A = J_{SP} + m\mathbf{d}_A^2$

$$E_{kin} = 1/2m\mathbf{v}^2 + 1/2\mathbf{J}\omega^2$$

$$E_{pot} = - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Reibungskraft:  $F_R = -\mu F_n = -\mu \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n$

Federkraft:  $F_F = -k\Delta x$

### Stöße

Gerade, zentral, teilelastisch

$$v'_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 (v_1 - v_2) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 (v_2 - v_1) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta U = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 (1 - C_R^2)$$

$$C = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} \quad \text{mit} \quad 0 \leq C \leq 1$$

### Koordinatensysteme

Polarkoordinaten (r,  $\theta$ )

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \omega \mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\omega \mathbf{e}_r$$

Zylindrische Koordinaten (r,  $\theta$ , z)

$$\mathbf{s}(t) = r(t)\mathbf{e}_r(\theta(t)) + z(t)\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{v} = \dot{s} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z$$

Affine Transformation:  $\mathbf{x}_C = [{}^C A_L] \mathbf{x}_L + \mathbf{t}_{L \rightarrow C}$

Elementarrotationen (negativer Drehsinn)

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Kinematische Kette

Freiheitsgrade in 3D:  $M = 6n - \sum_{i=1}^j (6 - f_j)$

Jacobimatrix (z.B. für  $x_1, x_2, x_3$ ):

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Zweikörperkette

$$X_P = l_1 \cos \alpha_1$$

$$Y_P = l_1 \sin \alpha_1$$

$$X_Q = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$Y_Q = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$$

# Kinematische Kette

Freiheitsgrade in 3D:  $M = 6n - \sum_{i=1}^j (6 - f_j)$

Jacobimatrix (z.B. für  $x_1, x_2, x_3$ ):

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Zweikörperkette

$$X_P = l_1 \cos \alpha_1$$

$$Y_P = l_1 \sin \alpha_1$$

$$X_Q = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$Y_Q = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{J}_Q \cdot \dot{\alpha}$$

$$\mathbf{v}_Q = \begin{bmatrix} -l_1 \sin \alpha_1 - l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & -l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \\ l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_Q = \frac{d\mathbf{J}_Q}{dt} \dot{\alpha} + \mathbf{J}_Q \ddot{\alpha}$$

$$[\mathbf{j}]_Q = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 - l_2(\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & -l_2(\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \\ -l_1 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 - l_2(\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & -l_2(\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \end{bmatrix}$$

# Beispiel Jacobi (Relevanz?)

Consider the mechanical system depicted in Figure 2. Let the vector of (minimal) generalized coordinates be  $\mathbf{q} = [\alpha \ \beta]^T$ . Calculate the generalized force vector  $\mathbf{Q}_2$  associated with the force  $\mathbf{F}_2$ .

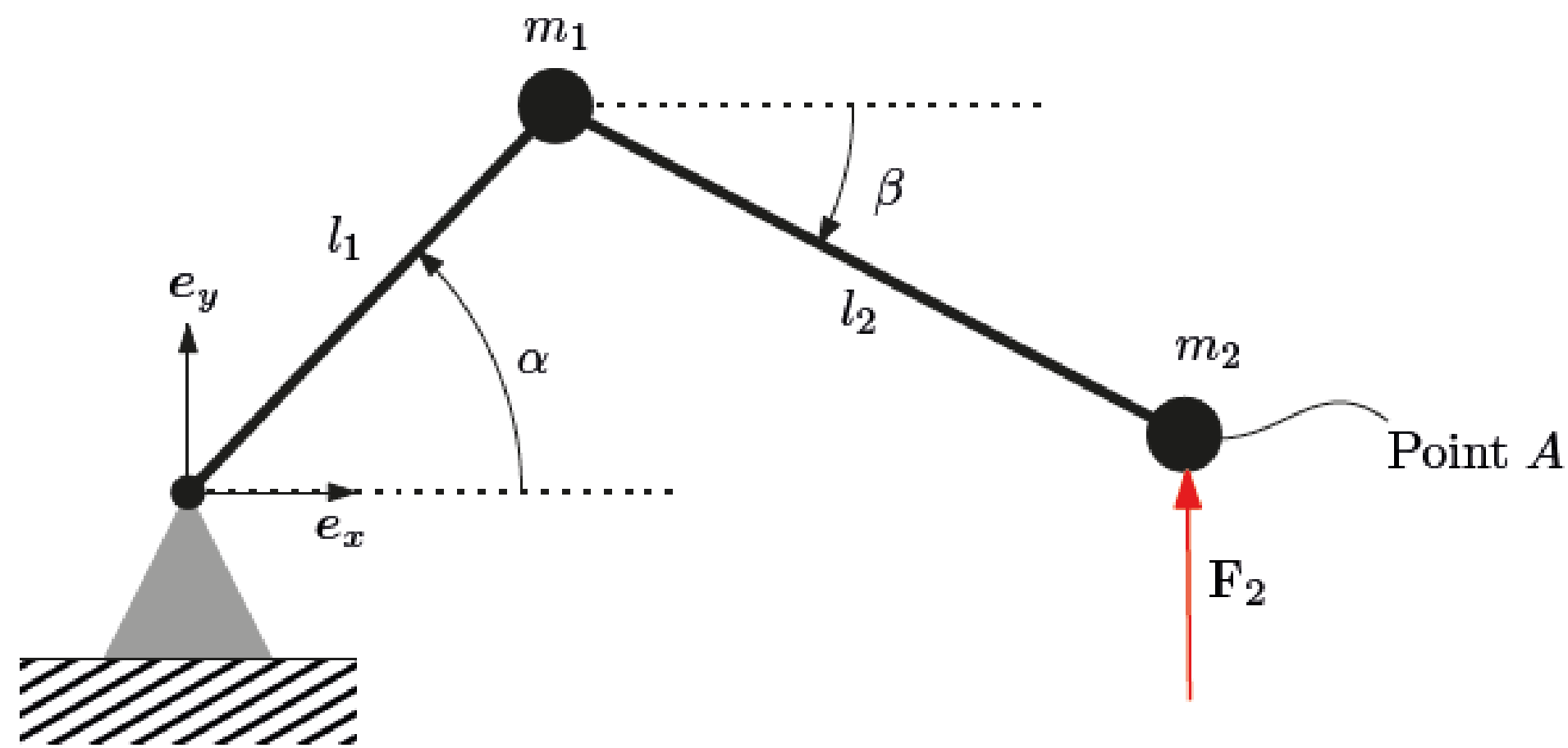


Figure 2: Sketch of the system.

**Solution.** The velocity of point  $A$  can be written as:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{J}_A \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\nu}_A.$$

Therefore, one way to obtain the Jacobian is to compute the velocity of point  $A$  as a function of the generalized velocities and read out the matrix. First, we compute the position vector as

$$\mathbf{r}_{OA} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha) + l_2 \cos(\beta) \\ l_1 \sin(\alpha) - l_2 \sin(\beta) \\ 0 \end{bmatrix},$$

the velocity is then given by

$$\mathbf{v}_A = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{OA}) = \begin{bmatrix} -l_1 \dot{\alpha} \sin(\alpha) - l_2 \dot{\beta} \sin(\beta) \\ l_1 \dot{\alpha} \cos(\alpha) - l_2 \dot{\beta} \cos(\beta) \\ 0 \end{bmatrix},$$

which can be rewritten as a matrix multiplication in the following way:

$$\mathbf{v}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha) & -l_2 \sin(\beta) \\ l_1 \cos(\alpha) & -l_2 \cos(\beta) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\nu}_A}.$$

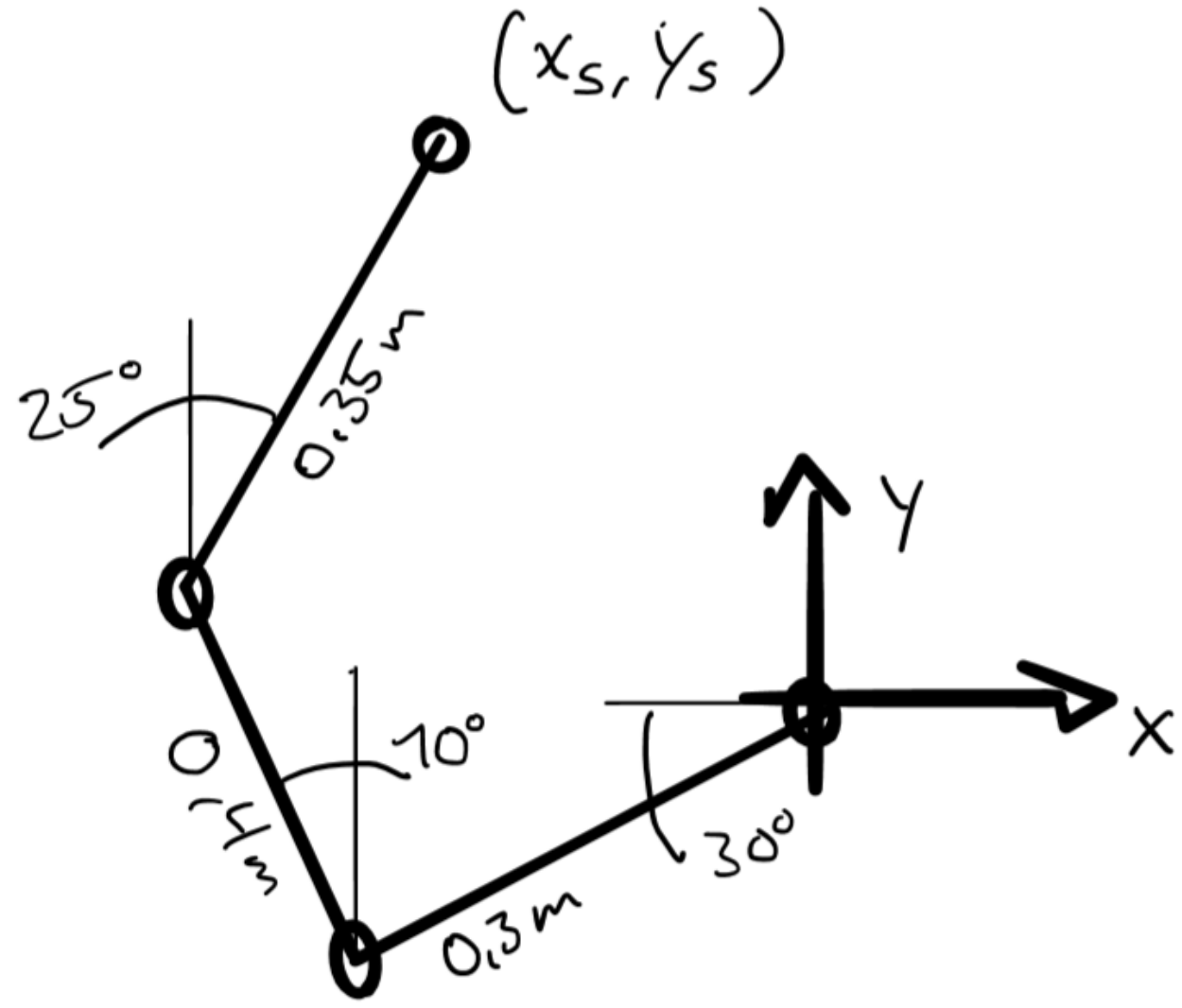
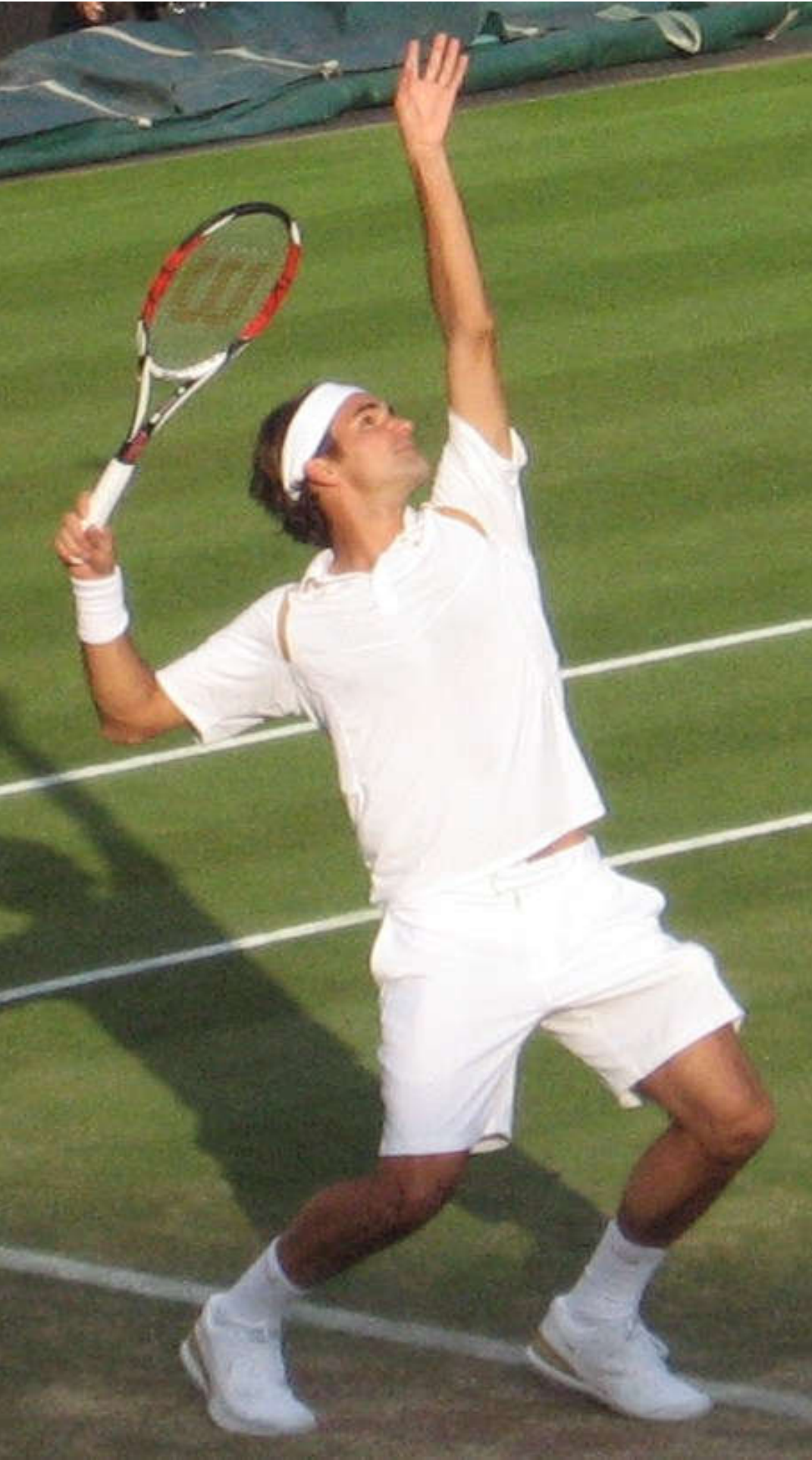
This formulation allows us to read out the required quantities directly.

The generalized force  $\mathbf{Q}_2$  is then given by

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{J}_A^T \cdot \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\alpha) & l_1 \cos(\alpha) & 0 \\ -l_2 \sin(\beta) & -l_2 \cos(\beta) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 l_1 \cos(\alpha) \\ -F_2 l_2 \cos(\beta) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

*Remark.* If we were to compute the generalized force corresponding to a torque, we would apply the same procedure with the angular velocity  $\boldsymbol{\omega}$  of the body.

# Aufgabe X – Kinematische Kette



# Kinetik

## Grundlagen

### Kinematik

$$\omega = 2\pi f \quad f = 1/T \quad v_T = \frac{v}{r} = r\omega$$

$$a_{zp} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

s, v, a und  $\theta, \omega, \alpha$ : Konstante Linearbeschleunigung oder Winkelbeschleunigung

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$$

$$s = s_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{2as - 2as_0 + v_0^2}}{a}$$

Translation + Rotation um eine fixe Achse A

$$\mathbf{s}_P(t) = \mathbf{s}_A(t) + r_{AP}\mathbf{e}_r(t)$$

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_A(t) + r_{AP}\omega(t)\mathbf{e}_\phi(t)$$

$$\mathbf{a}_P(t) = \mathbf{a}_A(t) + r_{AP}\alpha(t)\mathbf{e}_\phi(t) - r_{AP}\omega(t)^2\mathbf{e}_r(t)$$

Gauss'sche Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f^2 = \left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial x}\right)_{|x=x_0, y=y_0, \dots}^2 (\Delta x)^2 +$$

$$\left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial y}\right)_{|x=x_0, y=y_0, \dots}^2 (\Delta y)^2 +$$

$$\left(\frac{\partial f(x, y, z, \dots)}{\partial z}\right)_{|x=x_0, y=y_0, \dots}^2 (\Delta z)^2 + \dots$$

### Stöße

Gerade, zentral, teilelastisch

$$v'_1 = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2(v_1 - v_2)C_R}{m_1 + m_2}$$

$$v'_2 = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_1(v_2 - v_1)C_R}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta U = \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2(1 - C_R^2)$$

$$C = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} \quad \text{mit} \quad 0 \leq C \leq 1$$

### Koordinatensysteme

Polarkoordinaten(r,  $\theta$ )

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \omega\mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\omega\mathbf{e}_r$$

Zylindrische Koordinaten (r,  $\theta$ , z)

$$\mathbf{s}(t) = r(t)\mathbf{e}_r(\theta(t)) + z(t)\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{v} = \dot{s} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2r)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + \ddot{\theta}r)\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e}_z$$

Affine Transformation:  $\mathbf{x}_C = [{}^C A_L] \mathbf{x}_L + \mathbf{t}_{L \rightarrow C}$

Elementarrotationen (negativer Drehsinn)

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Kinetik

$$\mathbf{P} = M_{sp}\mathbf{v}_{sp} \quad \mathbf{L} = \mathbf{J}\omega = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Schwerpunkt:  $\mathbf{R}_{sp} = \frac{\sum_a m_a \mathbf{r}_a}{\sum_a m_a}$

Trägheitsmoment:  $\mathbf{J}_S = \sum_i m_i \mathbf{r}_{i,S}^2$

Satz von Steiner:  $J_A = J_{SP} + m\mathbf{d}_A^2$

$$E_{kin} = 1/2m\mathbf{v}^2 + 1/2\mathbf{J}\omega^2$$

$$E_{pot} = - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Reibungskraft:  $F_R = -\mu F_n = -\mu \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n$

Federkraft:  $F_F = -k\Delta x$

### Kinematische Kette

Freiheitsgrade in 3D:  $M = 6n - \sum_{i=1}^j (6 - f_j)$

Jacobimatrix (z.B. für  $x_1, x_2, x_3$ ):

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Zweikörperkette

$$X_P = l_1 \cos \alpha_1$$

$$Y_P = l_1 \sin \alpha_1$$

$$X_Q = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$Y_Q = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$$

# Kinetik - Übersicht



# Kinetik – Formelblatt

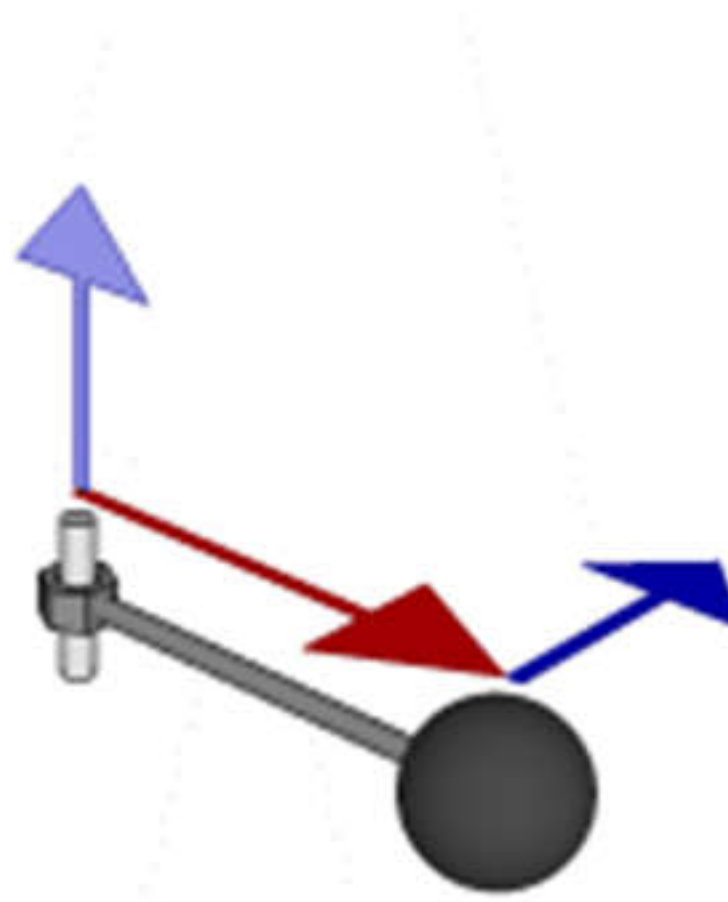
$$\mathbf{P} = M_{sp} \mathbf{v}_{sp}$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{J}\omega = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$$

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$



[https://en.wikipedia.org/wiki/Angular\\_momentum](https://en.wikipedia.org/wiki/Angular_momentum)

# Kinetik – Formelblatt

$$\text{Schwerpunkt: } \mathbf{R}_{\text{sp}} = \frac{\sum_a m_a \mathbf{r}_a}{\sum_a m_a}$$

$$\text{Trägheitsmoment: } \mathbf{J}_S = \sum_i m_i \mathbf{r}_{i,S}^2$$

$$\text{Satz von Steiner: } J_A = J_{SP} + m d_A^2$$

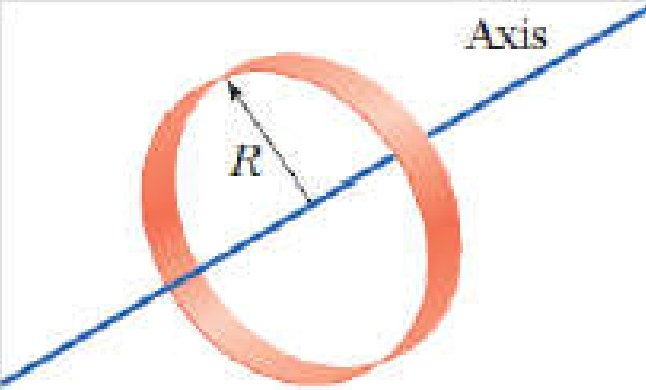
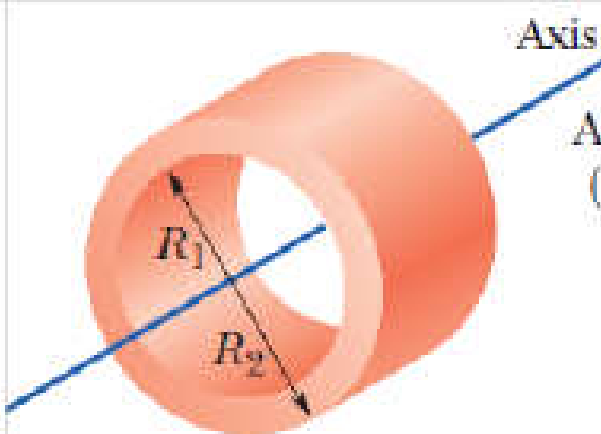
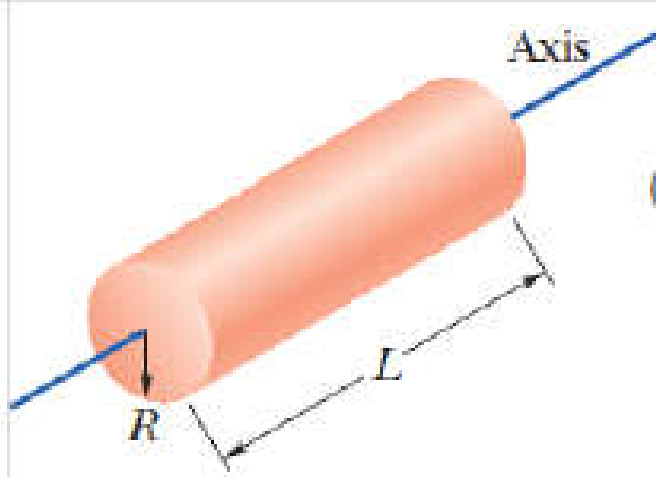
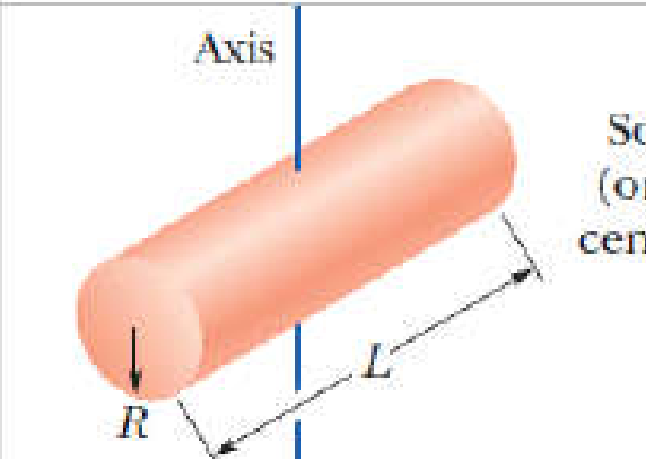
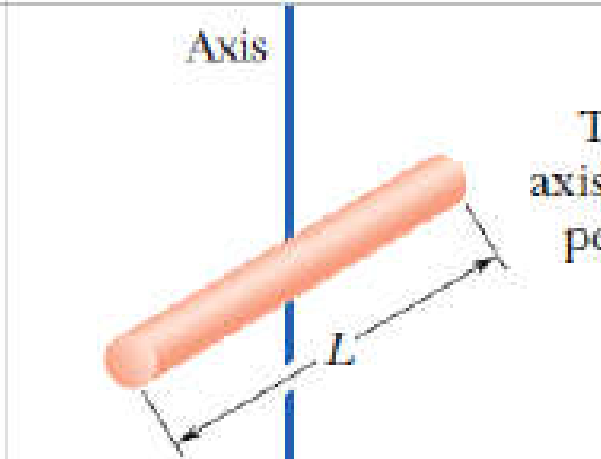
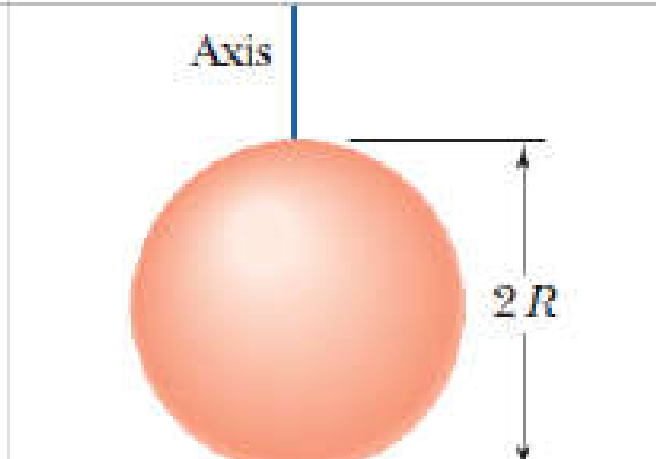
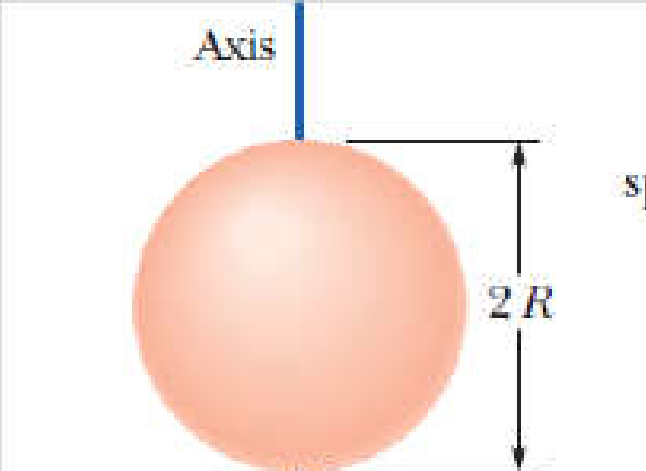
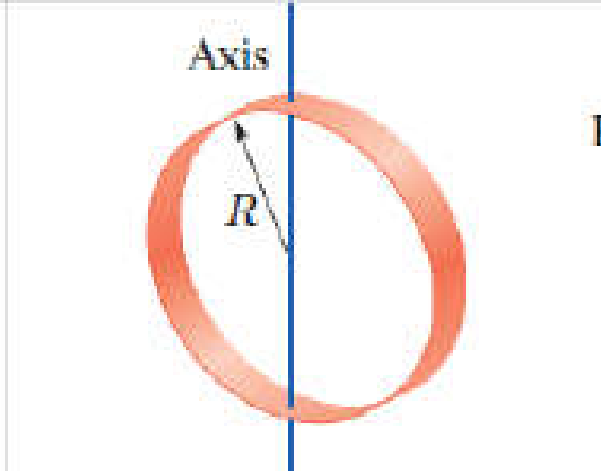
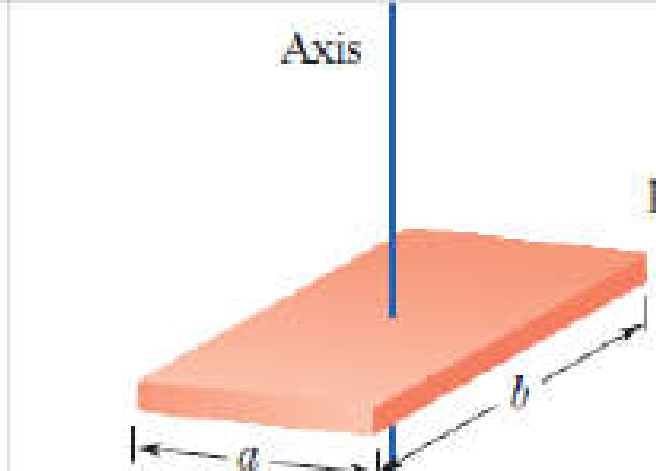
$$E_{kin} = 1/2 m \mathbf{v}^2 + 1/2 \mathbf{J} \omega^2$$

$$E_{pot} = - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\text{Reibungskraft: } F_R = -\mu F_n = -\mu \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n$$

$$\text{Federkraft: } F_F = -k \Delta x$$

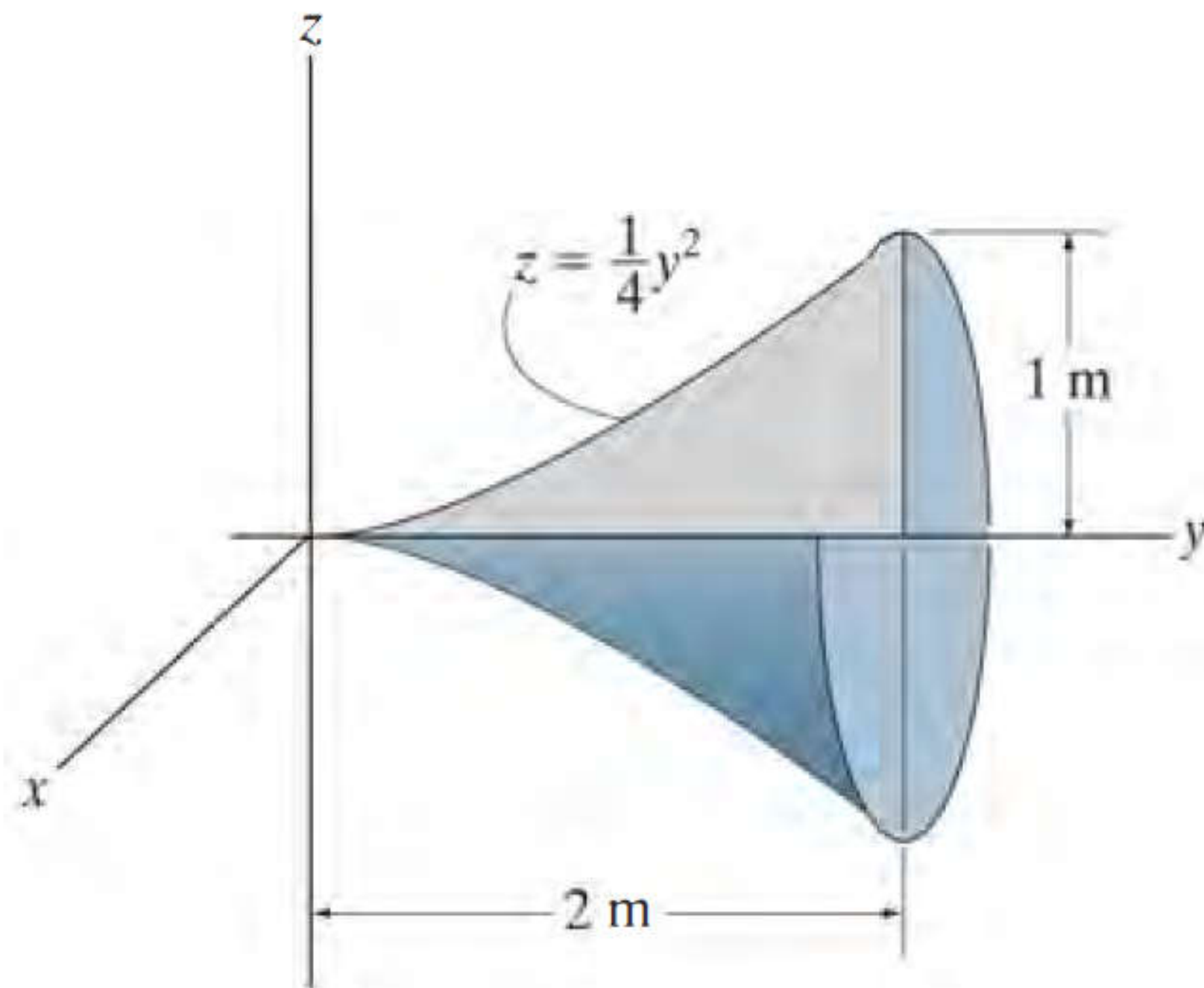
# Trägheitsmomente

 <p>Hoop about central axis</p> <p><math>I = MR^2</math> (a)</p>	 <p>Annular cylinder (or ring) about central axis</p> <p><math>I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)</math> (b)</p>	 <p>Solid cylinder (or disk) about central axis</p> <p><math>I = \frac{1}{2}MR^2</math> (c)</p>
 <p>Solid cylinder (or disk) about central diameter</p> <p><math>I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2</math> (d)</p>	 <p>Thin rod about axis through center perpendicular to length</p> <p><math>I = \frac{1}{12}ML^2</math> (e)</p>	 <p>Solid sphere about any diameter</p> <p><math>I = \frac{2}{5}MR^2</math> (f)</p>
 <p>Thin spherical shell about any diameter</p> <p><math>I = \frac{2}{3}MR^2</math> (g)</p>	 <p>Hoop about any diameter</p> <p><math>I = \frac{1}{2}MR^2</math> (h)</p>	 <p>Slab about perpendicular axis through center</p> <p><math>I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)</math> (i)</p>

# Kaffeepause

Beginn:

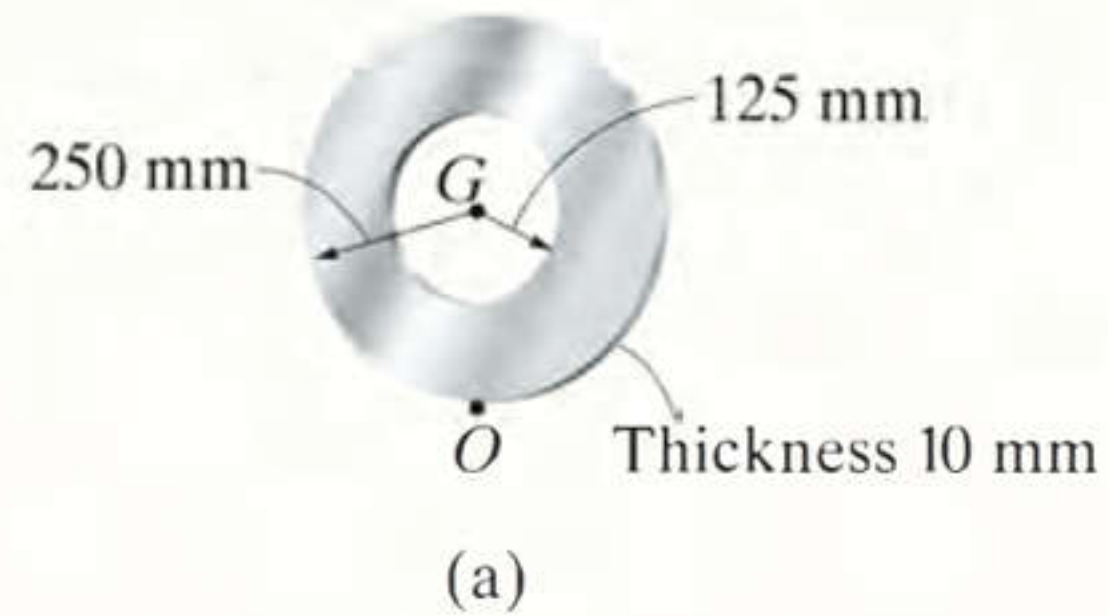
# Übung XII – Trägheitsmoment



**Prob. 17-9**

## Übung XIII – Trägheitsmoment

If the plate shown in Fig. 17–6a has a density of  $8000 \text{ kg/m}^3$  and a thickness of 10 mm, determine its moment of inertia about an axis directed perpendicular to the page and passing through point  $O$ .



# Übung XIV – Kinetik FS18

Das Tram 9 (

$$m = 40000\text{kg}$$

) fährt mit einer Geschwindigkeit von

$$v = 20\text{km/h}$$

als

$$10\text{m}$$

vor der Haltestelle "ETH Hauptgebäude" plötzlich eine Notbremsung eingeleitet werden muss. Wieviele Meter von der Haltestelle entfernt bleibt das Tram stehen, wenn die Bremsen eine konstante Bremskraft von

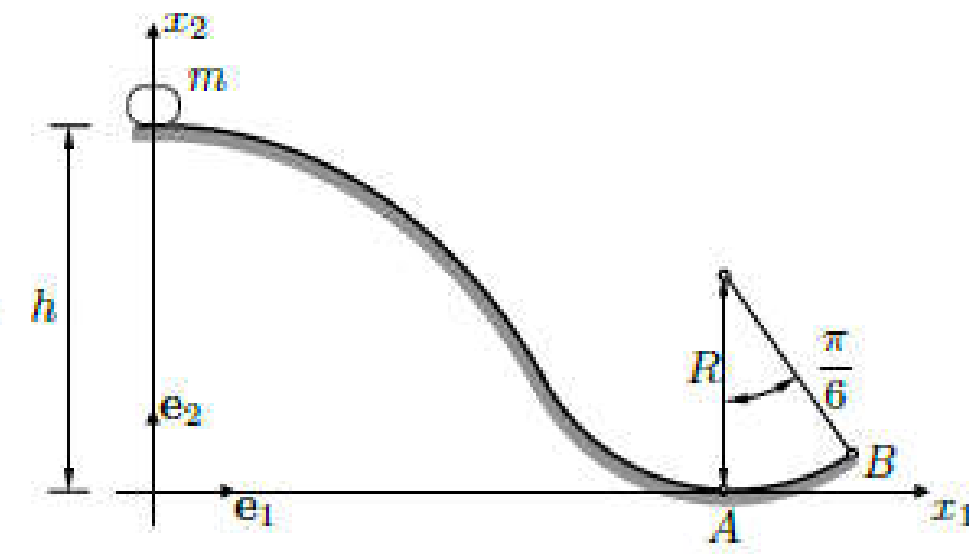
$$240\text{kN}$$

bewirken?

Anmerkung: nehmen Sie an, dass die Strecke keine Steigung aufweist

# Übung XV – Dynamik Massenpunkt

2.2 A block of mass  $m$  slides down a frictionless incline. The block is released at height  $h$  above the bottom of the loop, with negligible velocity. What is the work  $W$  done by the reaction force  $F_N$  exerted by the track on the sliding block, when the block reaches point  $B$ ?

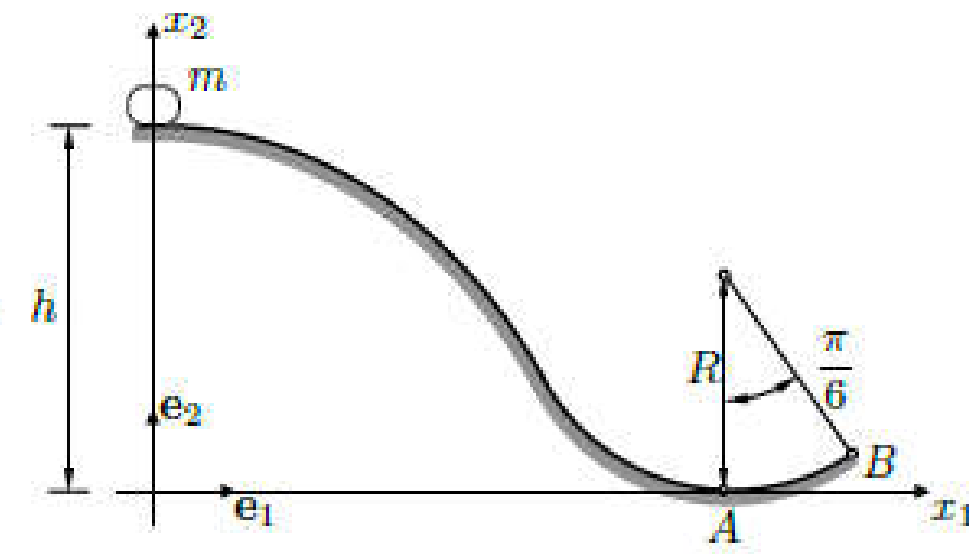


- (a)  $W = 0$
- (b)  $W = mgR(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$
- (c)  $W = mgh$
- (d)  $W = mgR\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (e)  $W = mg\sqrt{h}$



# Übung XVI – Dynamik Massenpunkt

2.2 A block of mass  $m$  slides down a frictionless incline. The block is released at height  $h$  above the bottom of the loop, with negligible velocity. What is the work  $W$  done by gravity  $F_G = mg$  exerted by the track on the sliding block, when the block reaches point  $B$ ?



- (a)  $W = 0$
- (b)  $W = mgR(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$
- (c)  $W = mgh$
- (d)  $W = mgR\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (e)  $W = mg\sqrt{h}$

# Übung XVII – Dynamik Massenpunkt

2.4 A block of mass  $m$  slides along a rough inclined plane with kinetic friction coefficient  $\mu$ , where  $\alpha$  indicates the inclination angle. The block is given an initial velocity  $v_0$  at time  $t_0$  directed down the incline. How much time  $t_s$  does the block need in order to stop?

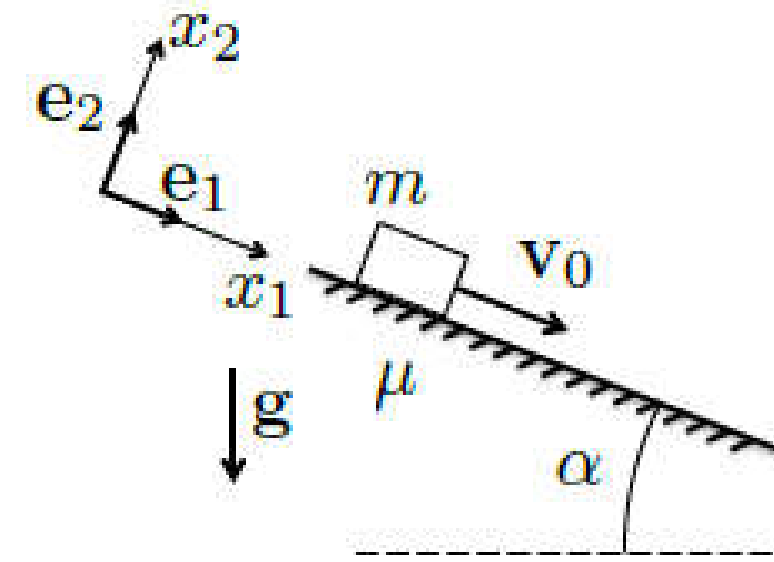
(a)  $t_s = \frac{v_0}{g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}$

(b)  $t_s = \frac{v_0}{g(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)}$

(c)  $t_s = \frac{gv_0}{(\mu \sin \alpha - \cos \alpha)}$

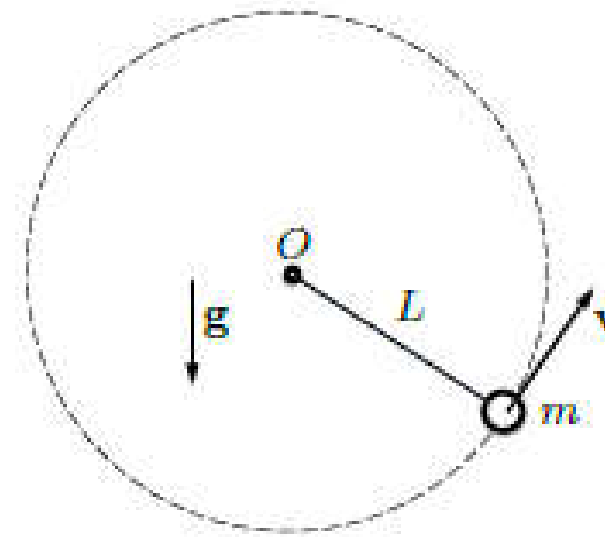
(d)  $t_s = \frac{v_0}{g(\mu \sin \alpha + \cos \alpha)}$

(e)  $t_s = \frac{v_0^2}{g(\mu \sin \alpha + \cos \alpha)}$



# Übung XVIII – Dynamik Massenpunkt

3.2 A ball of mass  $m$  is attached to a string of length  $L$ . It is being swung in a vertical circle with enough speed so that the string remains taut throughout the entire motion. Assume that no form of air resistance is present.



1. Which of the following statements is correct?
  - (a) The linear momentum is conserved.
  - (b) The angular momentum is not conserved.
  - (c) The magnitude of the angular momentum remains constant but direction changes.
  - (d) Angular momentum is zero.
  - (e) The kinetic energy is constant.
2. At the top and bottom of the vertical circle, the magnitude of the constraint force on the ball is  $N_{top}$  and  $N_{bot}$ , respectively. What is the value of the difference  $N_{bot} - N_{top}$ ?
  - (a)  $N_{bot} - N_{top} = 5mg$ .
  - (b)  $N_{bot} - N_{top} = 6mg$ .
  - (c)  $N_{bot} - N_{top} = -7mg$ .
  - (d)  $N_{bot} - N_{top} = -2mg$ .
  - (e)  $N_{bot} - N_{top} = 0$ .

# Kaffeepause

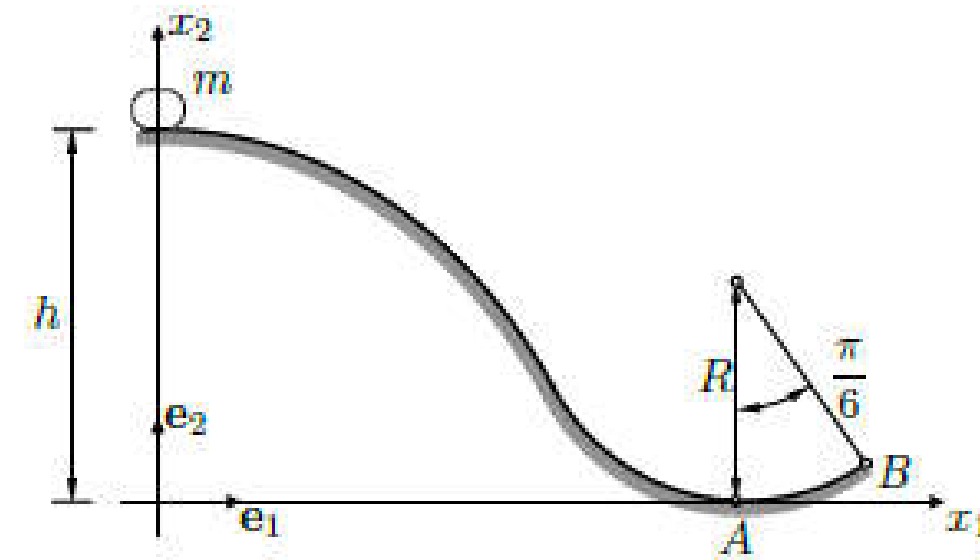
Beginn:

# Übung XIX – Dynamik Massenpunkt HS18

Ein Mann ( $m_M = 80\text{kg}$ ) fährt auf seinem  $m_S = 2\text{kg}$  schweren Luftkissen-Schlitten einen Berg mit einer Steigung von  $s = 21^\circ$  herunter. Berechne die Beschleunigung die dieser Schlittenfahrer bei seiner Abfahrt erfährt, wenn der Gleitreibungskoeffizient  $k = 0.07$  beträgt.

# Übung XX – Dynamik Massenpunkt

**2.3** A block of mass  $m$  slides down a frictionless incline (see Fig.). The block is released at height  $h$  above the bottom of the loop, with negligible velocity. At what speed  $v_B = |\mathbf{v}_B|$  does the block leave the track at point  $B$ ?



(a)  $v_B = \sqrt{2g \left[ h - R \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right]}$

(b)  $v_B = \sqrt{2g \left[ h - R \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]}$

(c)  $v_B = \sqrt{mg \left[ h - R \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right]}$

(d)  $v_B = \sqrt{mg \left[ h - R \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]}$

(e)  $v_B = \sqrt{2mg \left[ h - R \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]}$

# Kinetik – Impulserhaltung

## Stösse

Gerade, zentral, teilelastisch

$$v'_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_2 (v_1 - v_2) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 (v_2 - v_1) C_R}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta U = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 (1 - C_R^2)$$

$$C = \frac{v'_2 - v'_1}{v_2 - v_1}$$

# Übung XXI – Impulserhaltung

Bei zentralen Stößen liegen die Impulse der Stosskörper auf der Stosslinie

Beim ideal elastischen Stoss wird keine Energie in innere Energie umgewandelt.

Bei glatten Stößen findet die Impulsübertragung entlang der Stosslinie statt

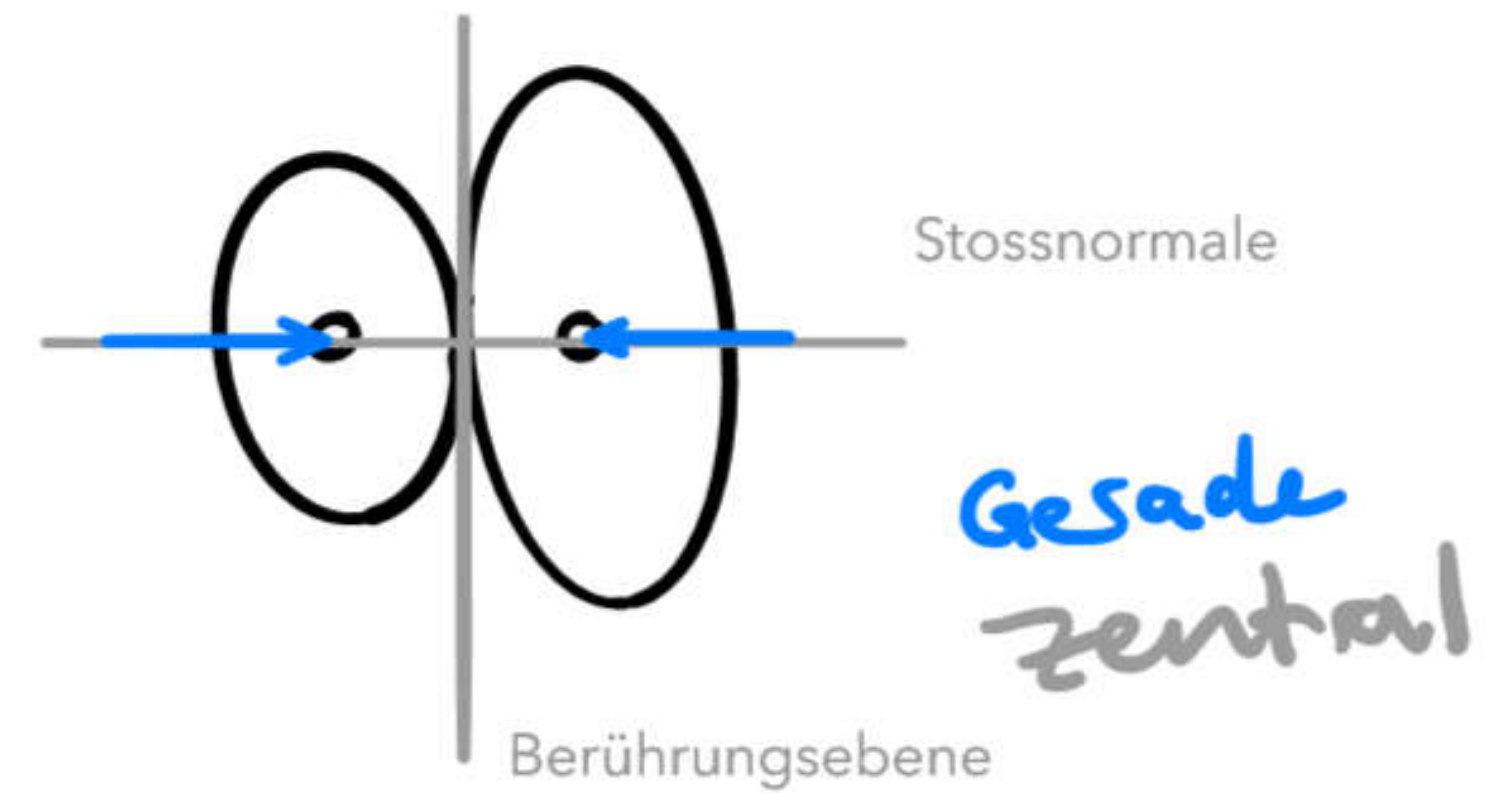
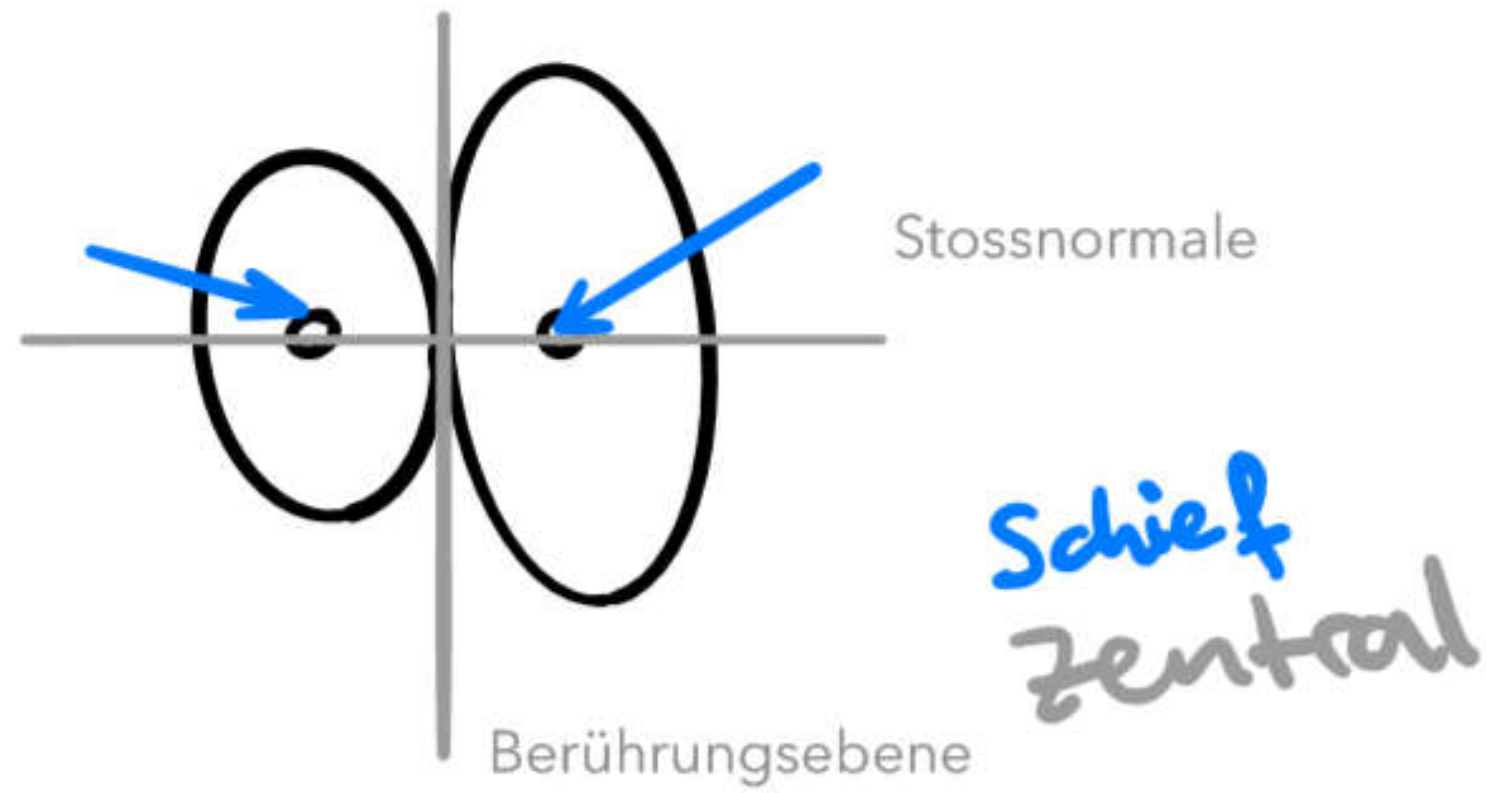
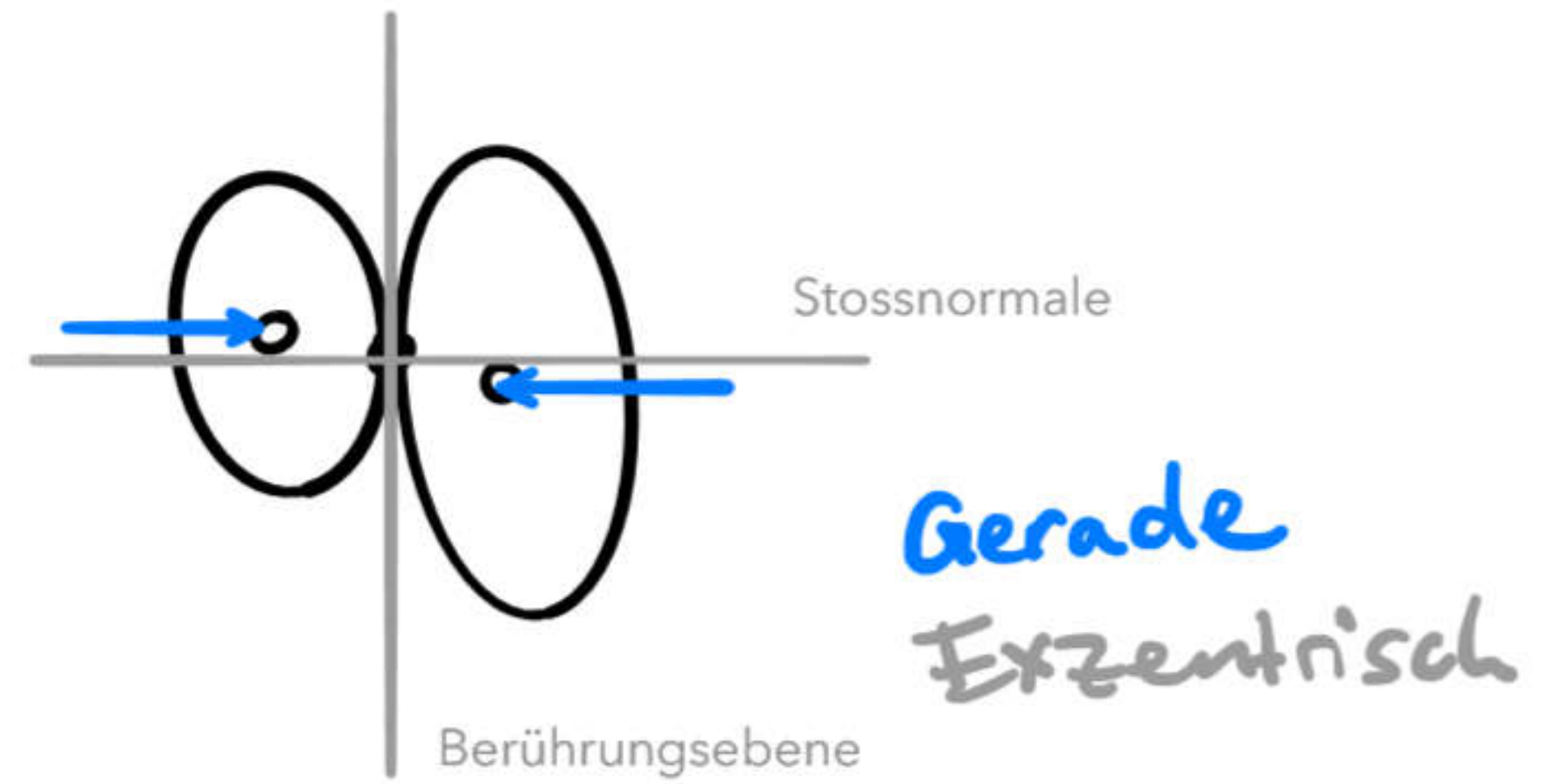
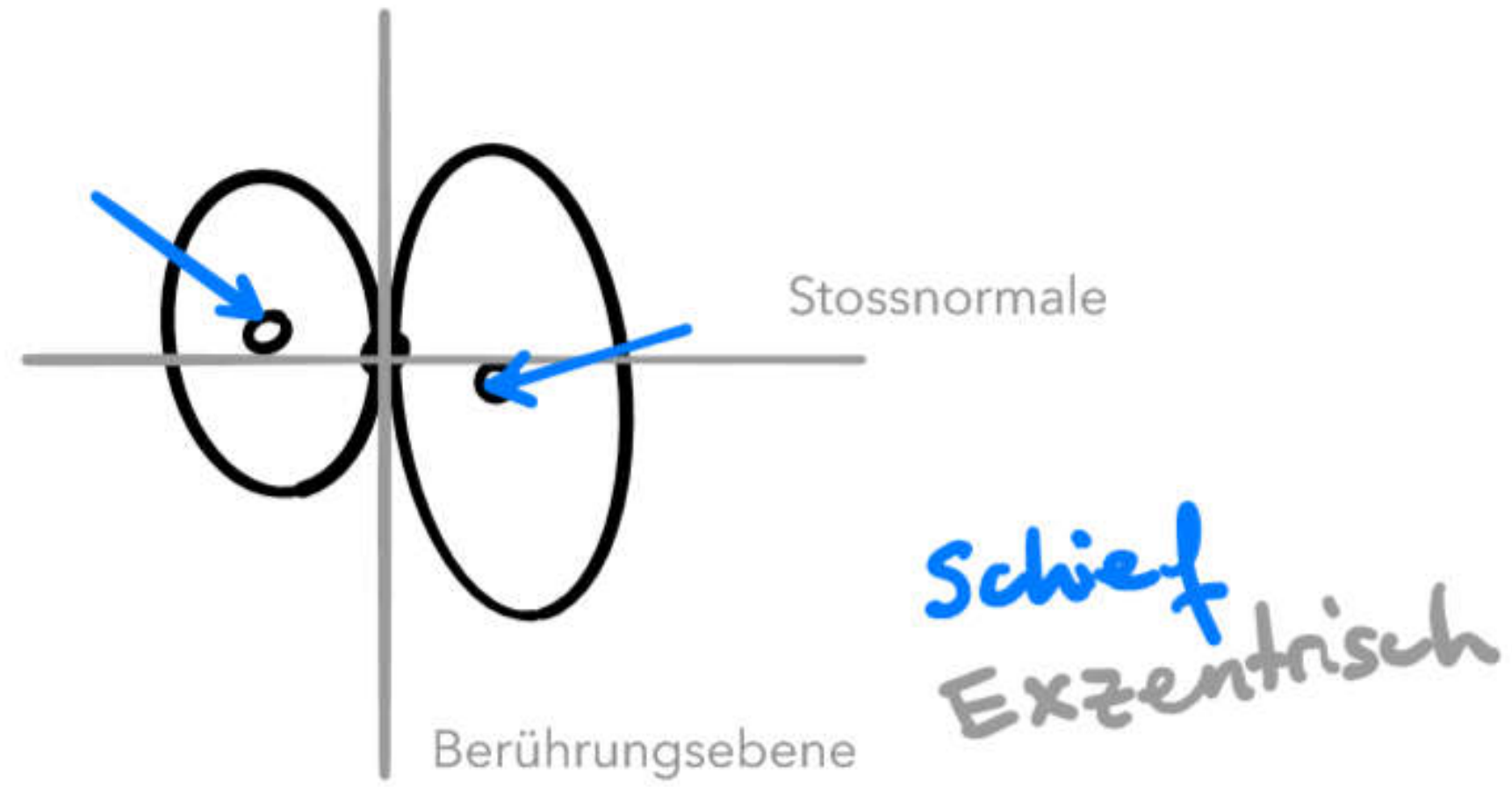
Bei inelastischen Stossprozessen gilt die Impulserhaltung



# Kaffeepause

Beginn:

# Impulserhaltung



# Impulserhaltung

## Schief, exzentrisch

Geschwindigkeitsrichtung mind. eines Körpers liegt **nicht** parallel zur Stossnormalen. Stossnormale geht **nicht** durch beide Schwerpunkte.

## Schief, zentral

Geschwindigkeitsrichtung mind. eines Körpers liegt **nicht** parallel zur Stossnormalen. Stossnormale geht durch beide Schwerpunkte.

## Gerade, exzentrisch

Geschwindigkeitsrichtungen der beiden Körper liegen parallel zur Stossnormalen. Stossnormale geht **nicht** durch beide Schwerpunkte.

## Gerade, zentral

Geschwindigkeitsrichtungen der beiden Körper liegen parallel zur Stossnormalen. Stossnormale geht durch beide Schwerpunkte.

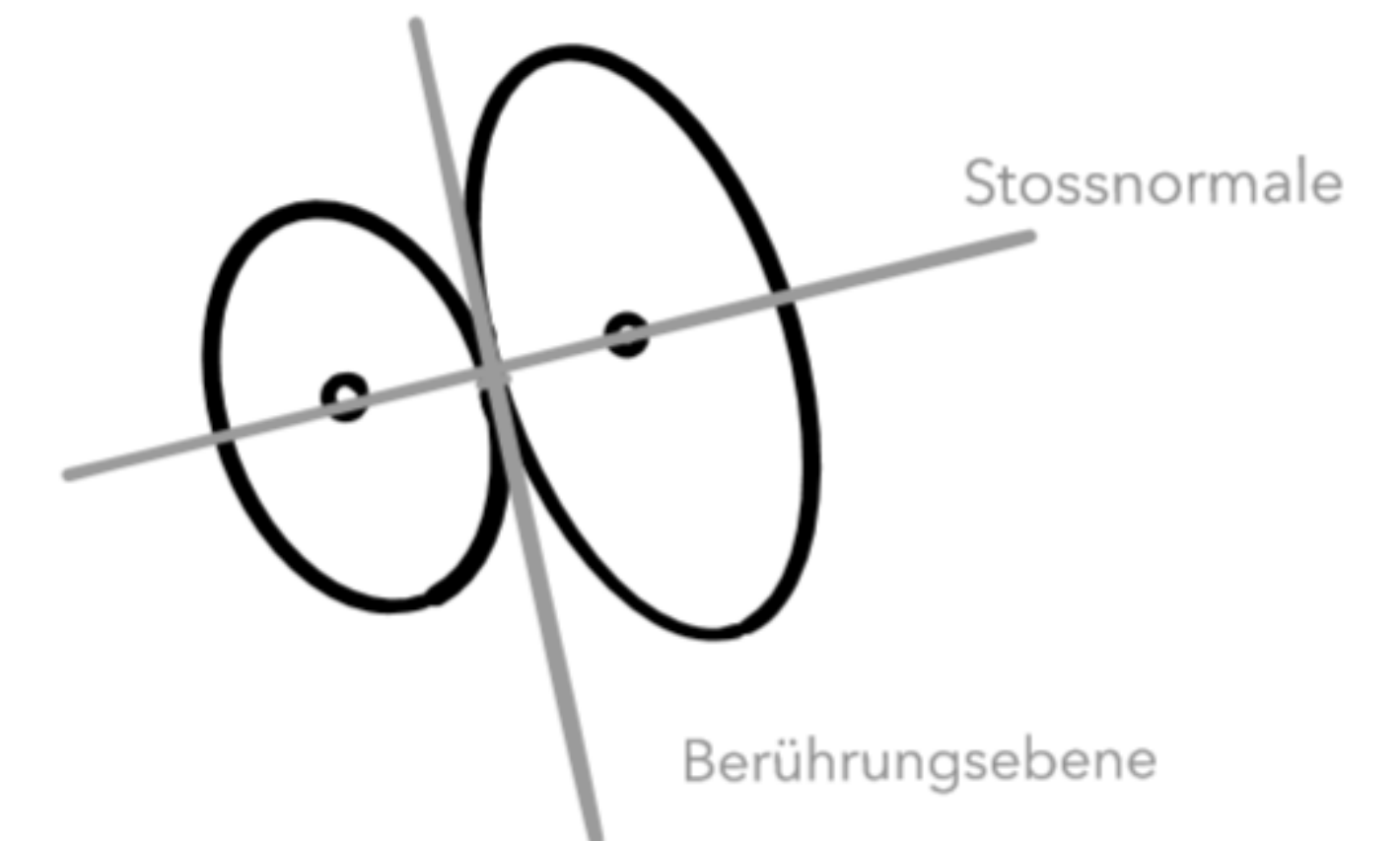
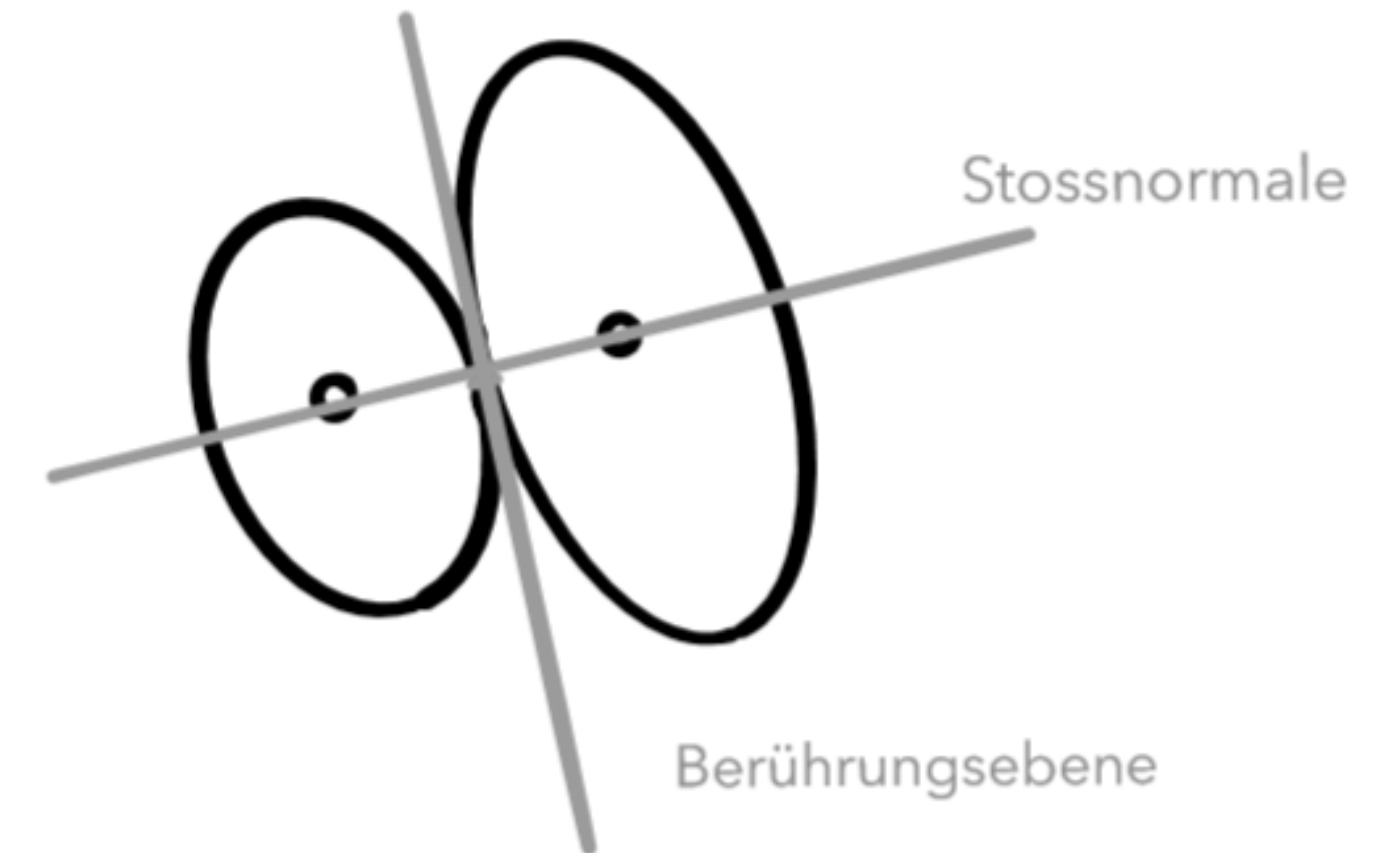
# Impulserhaltung

## Glatter Stoss

Ein glatter Stoss liegt dann vor, wenn die Stosskräfte in Richtung der Stoßnormalen wirken. Reibungskräfte werden dabei vernachlässigt.

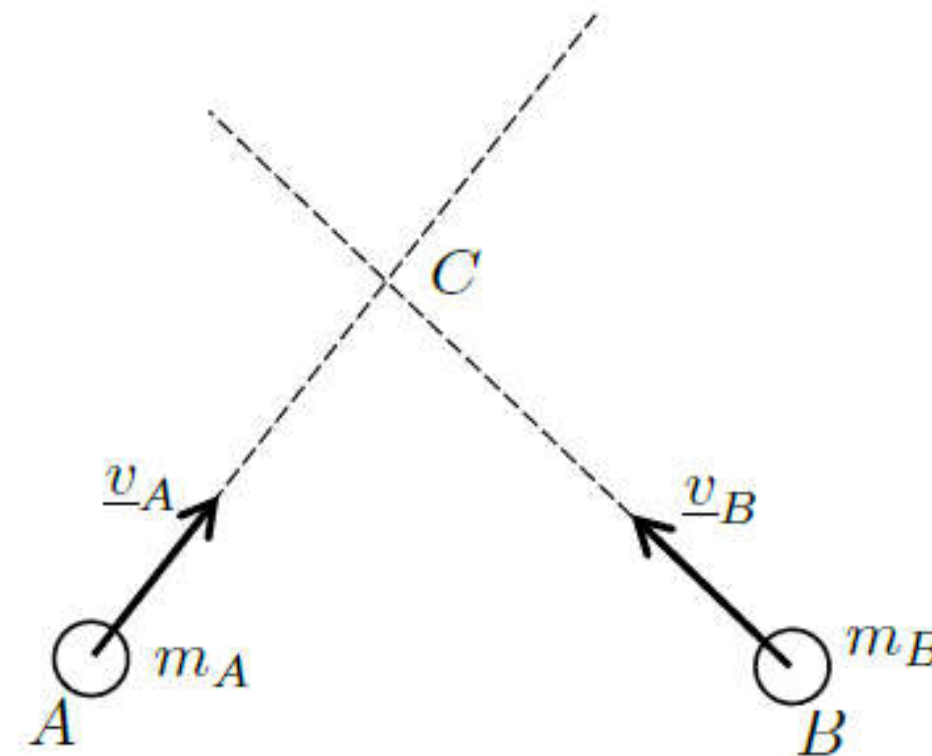
## Rauer Stoss

Hingegen liegt ein rauher Stoss vor, wenn die Reibungskräfte nicht vernachlässigt werden und damit auch Stosskräfte in der Berührungsebene wirken.



# Übung XXI – Impulserhaltung

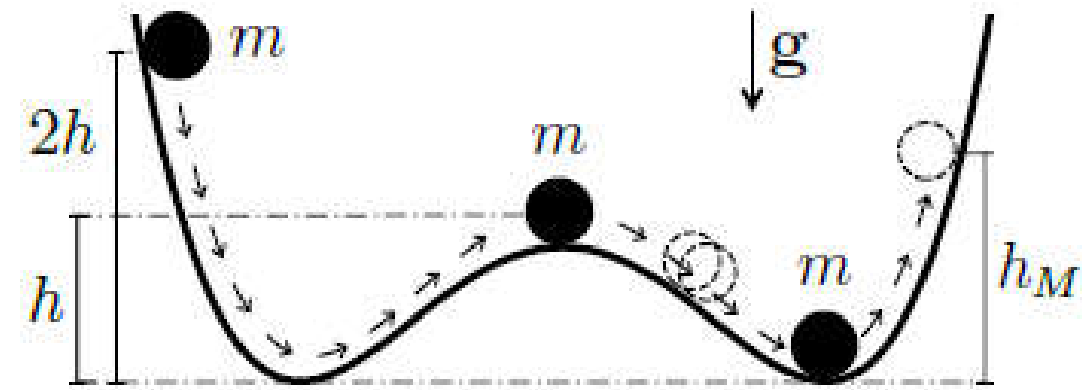
**5.2** Consider two particles  $A$  and  $B$  of negligible dimensions and masses  $m_A$  and  $m_B$ , respectively, moving freely with velocities  $\underline{v}_A$  and  $\underline{v}_B$  on a smooth, horizontal plane. They collide at a non-zero angle at point  $C$ , as shown. The impact forces are only aligned with the contact direction, i.e. no tangential impact forces are developed during the impact. Denote with  $e$  the coefficient of restitution ( $0 < e \leq 1$ ). Which of the following statements is correct?



- (a) The kinetic energy is conserved for any  $e$ .
- (b) The kinetic energy is conserved only if  $e = 0$ .
- (c) The linear momentum of each particle is conserved.
- (d) The linear momentum of the complete system is conserved for any  $e$ .
- (e) The linear momentum of the complete system is conserved only when  $e = 1$ .

# Übung XXII – Impulserhaltung

6.2 Three particles of equal mass  $m$  and negligible dimensions are at rest in the position shown in the figure on a smooth curvilinear guide laying in a vertical plane. The first particle is released from a height  $2h$  and then impacts the second particle with a perfectly inelastic collision. After the impact, these two particles slide down and collide with the third particle. The coefficient of restitution of this last impact is  $e$ . What is the maximum height  $h_M$  reached by the last particle? Assume that the particles never detach from the guide.



(a)  $h_M = h \frac{5(1+e)^2}{9}$

(b)  $h_M = h \frac{3(1+e)^2}{4}$

(c)  $h_M = h \frac{g(1+e)^2}{4m}$

(d)  $h_M = 2h(1+e)^2$

(e)  $h_M = h \frac{(1-e)}{2}$

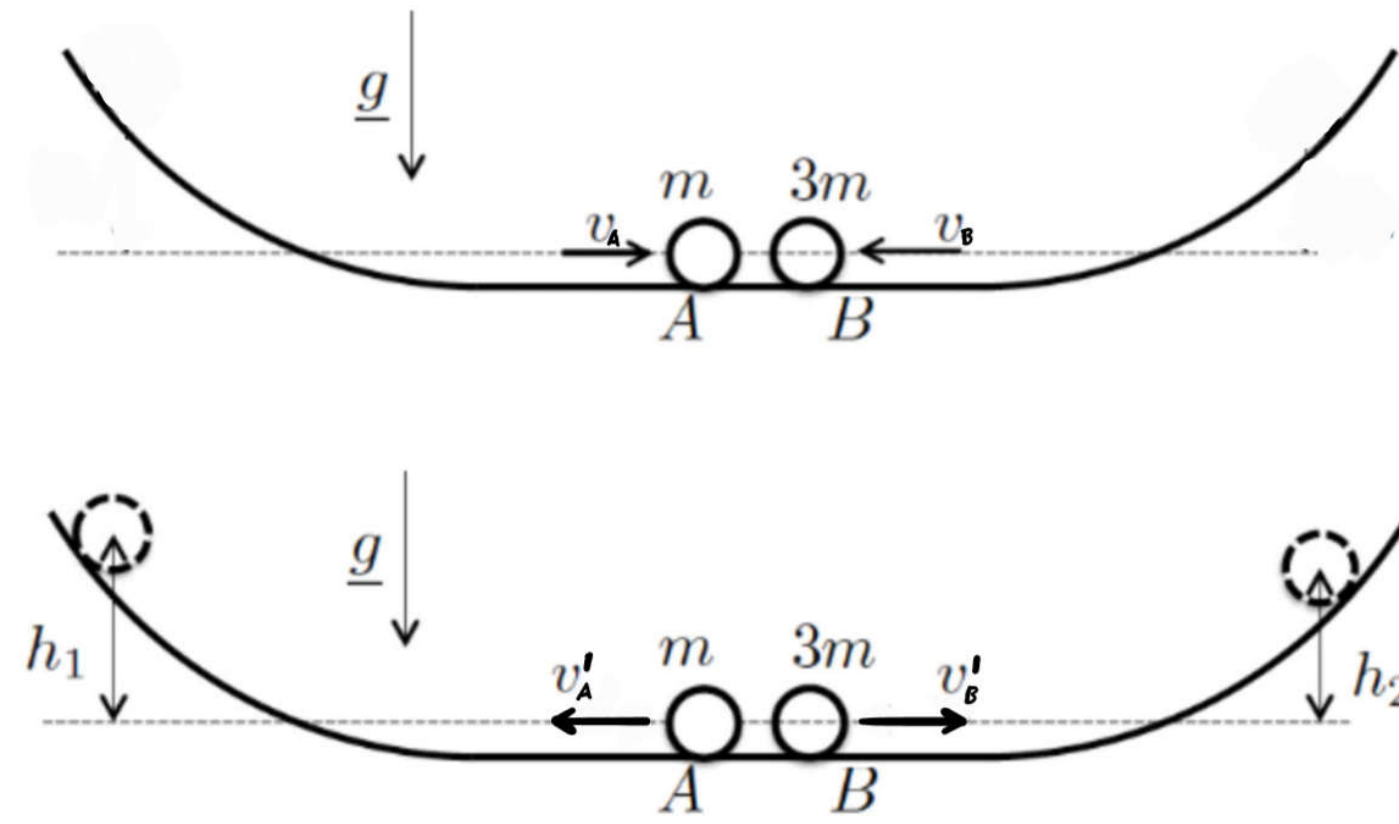
# Kaffeepause

Beginn:

# Übung XXIII – Impulserhaltung

**1.8 (2 points)** Two particles  $A$  and  $B$  collide with equal and opposite velocities of magnitude  $v$  on a horizontal, frictionless plane. Assume here a perfectly elastic impact, i.e.,  $e = 1$ , where  $e$  is the coefficient of restitution. What is the ratio  $\frac{h_1}{h_2}$  between the heights reached by the two particles after the impact?

- (a)  $\frac{h_1}{h_2} = 1$
- (b)  $\frac{h_1}{h_2} = 0$
- (c)  $\frac{h_1}{h_2} = \infty$
- (d)  $\frac{h_1}{h_2} = \frac{3}{2}$
- (e) None of the above





# Übung XXIV – Energieerhaltung

Zur Vorbereitung der Prüfungsendfeier rollt Alex ein Bierfass (Masse = 63.5 kg, Fasshöhe = 532 mm, Fassthroughmesser = 408 mm) von der Lastwagenladefläche (Höhe  $h = 1\text{m}$ ) über eine Rampe auf den Boden (Höhe = 0m) hinunter. Wie schnell ist die Translationsgeschwindigkeit des Fassschwerpunkts

$$v_2$$

am Boden, wenn die Winkelgeschwindigkeit auf der oberen Ladefläche konstant

$$\omega_1 = 0.25\text{rad/s}$$

betrug?

Nehmen Sie das Fass als homogenen Zylinder an. Trägheitsmoment eines Zylinders mit Masse

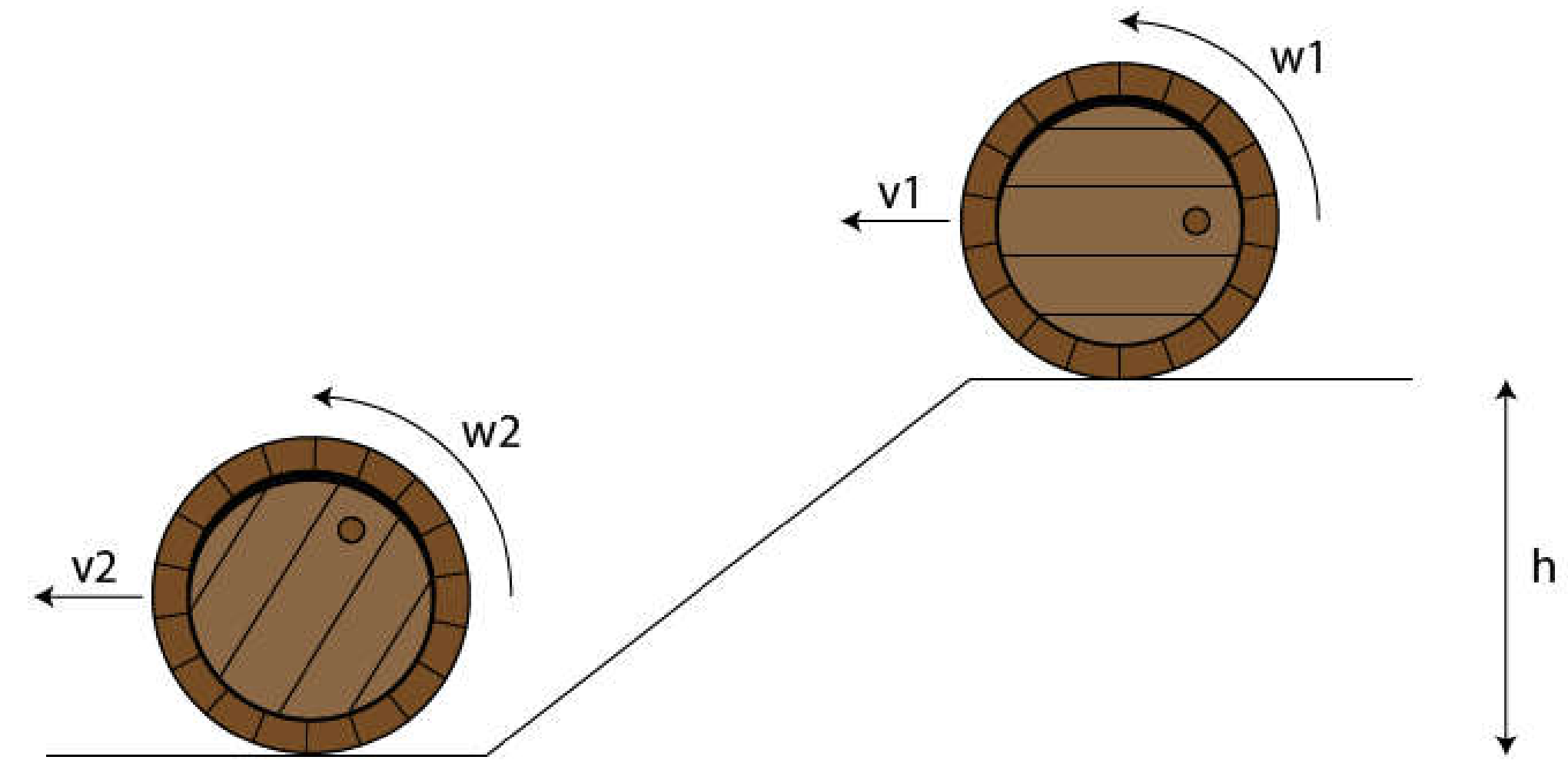
$$m$$

und Radius

$$R$$

um seine Symmetrieachse:

$$\frac{1}{2}mR^2$$



# Übung XXV – Energieerhaltung

Sie schnippen eine Münze mit ihrem Daumen senkrecht in die Luft. Sobald die Münze den Daumen verlassen hat (kein Kontakt mehr) erreicht sie eine zusätzliche Maximalhöhe  $x$  bevor sie wieder zu Boden fällt. Dabei rotiert sie gleichförmig mit  $\omega = 6\text{rad/s}$  und gleichbleibender Rotationsachse. Berechnen Sie die durchschnittlich wirkende Kraft während der Interaktion, wenn die Interaktion zwischen Daumen und Münze über eine Distanz von  $x = 3\text{cm}$  stattfindet.

Nehmen Sie die Bewegung der Münze, die Bewegung des Daumens, und die Interaktionskraft als rein vertikal an.

Maximalhöhe  $x = 30\text{cm}$

Masse der Münze =  $4\text{g}$

Trägheitsmoment der Münze um die Rotationsachse =  $1.44 * 10^{-7}\text{kg m}^2$

# Energieerhaltung

# Lagrange

## Lagrange-Formalismus

$$L = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt}$$
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = 0$$

# Übung XXVI – Lagrange

Das Abfedern des Körpers beim Gehen kann in erster Näherung als eine mathematisches Feder mit der Federkonstante  $k$ , der Masse  $m$  und Auslenkung  $x$  beschrieben werden. Bewerten Sie ob folgendene Funktionen gültige Lagrange-Funktionen für dieses Problem sind:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + 3mk\dot{x}$$

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}kx^2$$

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}mx^2\dot{x}^2 + mk$$

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Wann Newton-Euler/Impuls oder Energie (Lagrange)?

# Inverse dynamische Analyse

## Lagrange-Formalismus

$$L = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = 0$$

## Energie des Mehrkörpersystems

mit  $W$  als Leistung

$$W_{M, \text{aktiv}} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$W_{R, \text{passiv}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}$$

$$\frac{\Delta E_s}{\Delta t} = \sum_i W_{R,i} + \sum_j W_{M,j} - \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

## Inverse dynamische Analyse

mit  $R$  als Reaktionskräfte

$$2D: J_0 \alpha = M_{zp} + M_{zd} + \sum_i (R_{x,i} \cdot l_{x,i} + R_{y,i} \cdot l_{y,i})$$

## Euler-Gleichungen

Für rotierende Starrkörpersysteme:

$$F_x = m \left( \frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y \right)$$

$$F_y = m \left( \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z \right)$$

$$F_z = m \left( \frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x \right)$$

$$M_x = J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z$$

$$M_y = J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x$$

$$M_z = J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y$$

## Muskelmechanik

Hillmodell, mit Muskelkraft  $F$

$$F(v) = F_0 - (F_0 + a) \frac{v}{v+b} = \frac{F_0 b - av}{v+b}$$

$$L(v) = v F(v)$$

$$\dot{Q}(v) = \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{F(v)}{F_0} \right) (v+b)$$

Huxleymodell:

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = f(x)[1 - n(x,t)] - g(x) \cdot n(x,t) - v(t) \cdot n'(x,t)$$

$$\bar{n}(x) = \frac{f(x)}{f(x) + g(x)} \quad \text{isometrisch}$$

## Muskeloptimierung

$$J = \psi(F_1, F_2, \dots, F_N) - \lambda (M_{tot} - \sum_{i=1}^N h_i \cdot F_i)$$

## Harmonischer Oszillator

$$m\ddot{y} = -ky + mg$$

$$y(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t + \frac{g}{\omega^2}$$

## Übergang Laufen-Gehen

$$r(t) = l_0 + \frac{r_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega^2} (\cos(\omega t) - 1)$$

$$\Delta l_{hor} = l_0 (1 - \sin(\alpha_0))$$

## Hilfsgleichungen

Quadratische Lösungsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sinus- und Kosinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

# Inverse Dynamics

## Inverse dynamische Analyse

mit  $R$  als Reaktionskräfte

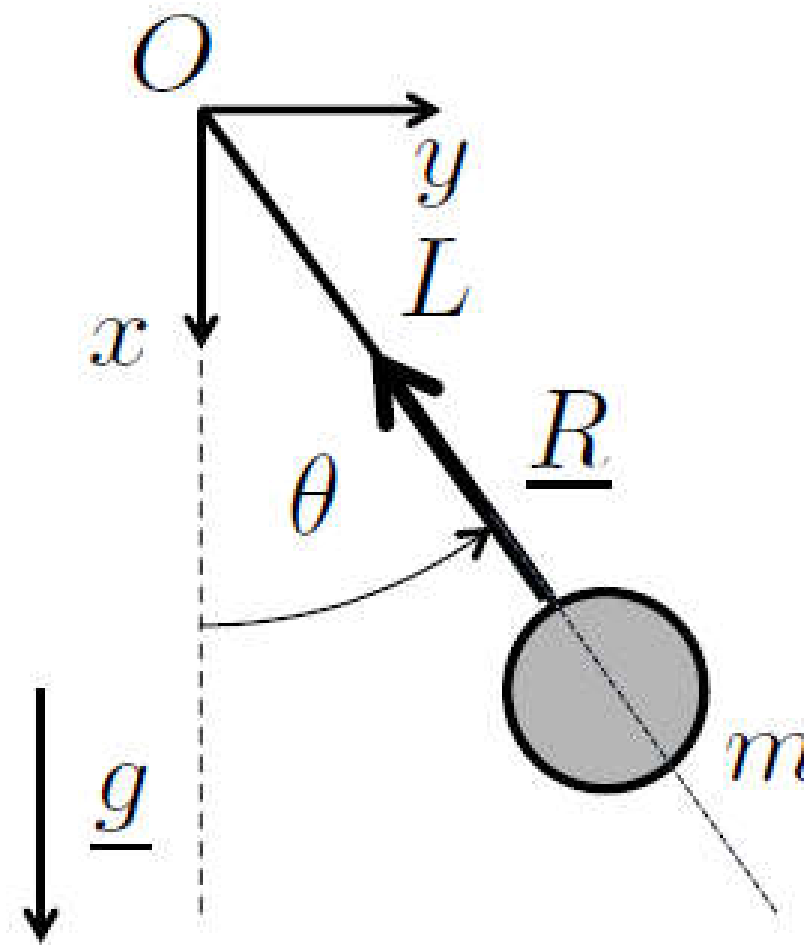
$$2D: J_0\alpha = M_{zp} + M_{zd} + \sum_i (R_{x,i} \cdot l_{x,i} + R_{y,i} \cdot l_{y,i})$$



# Übung XXVII – Inverse Dynamics

**1.12 (2 points)** The pendulum shown in the figure swings on a vertical plane. Denote by  $R$  the magnitude of the constraint force  $\underline{R}$ . Which of the following statements is correct?

- (a)  $R = mg \cos \theta$  always.
- (b)  $R > mg \cos \theta$  always.
- (c)  $R < mg \cos \theta$  always .
- (d)  $R$  depends on the motion  $\theta(t)$ .



# Übung XXVIII – Inverse Dynamics

Write down the differential equation that governs the motion of the seesaw. You can derive it from either Newtonian mechanics or energy conservation principles. Assume that propellers generate forces  $F_1$  and  $F_2$ .

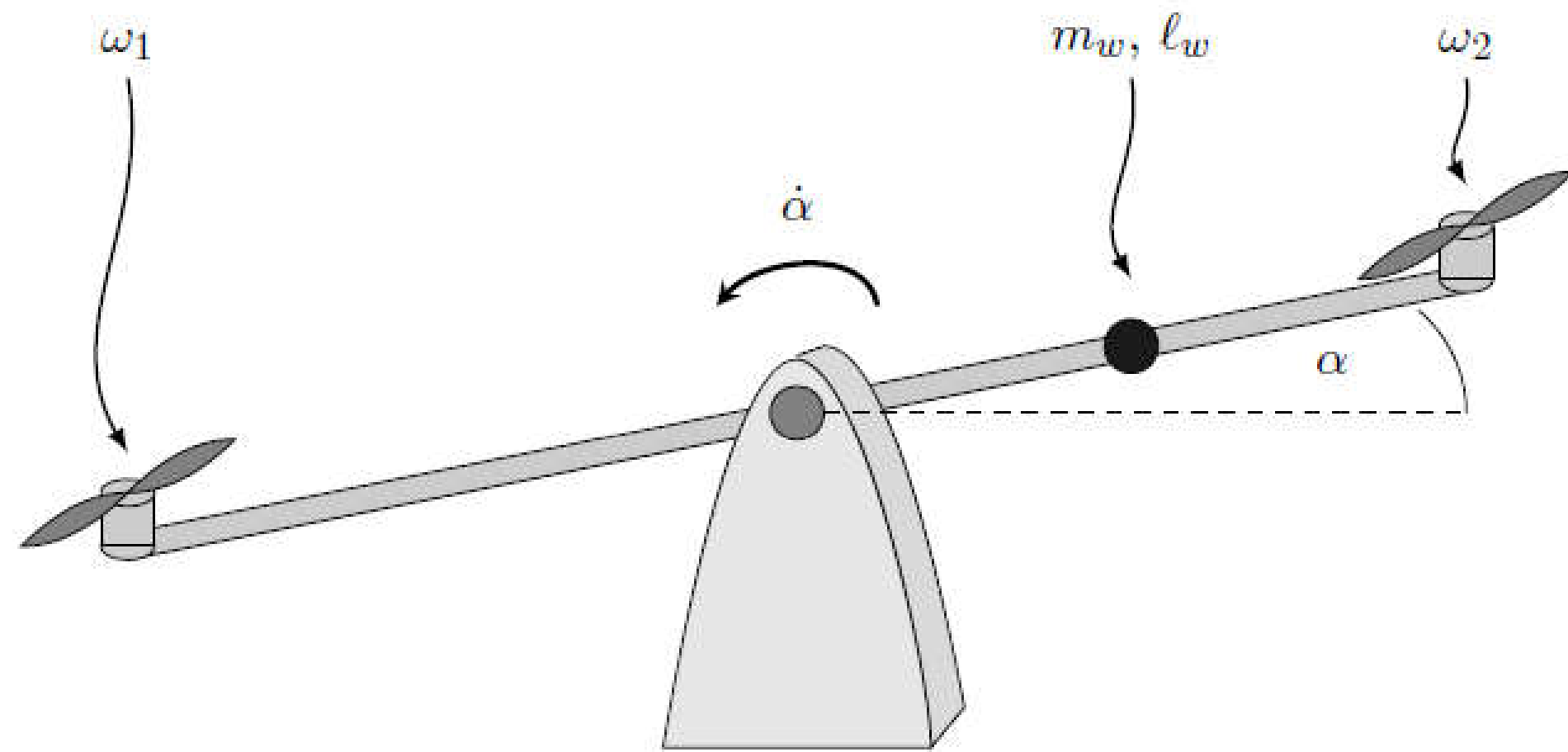


Figure 1: Seesaw with attached weight with mass  $m_w$  and distance from center  $\ell_w$

# Übung XXIX – Inverse Dynamics

A disk of mass  $M$  and radius  $R$  is free to rotate about its center of mass  $O$ , as shown in the figure. A cable connected to the block  $B$  of mass  $m$  is wound tightly around the disk. Assume that the mass of the cable is negligible. The centroidal moment of inertia of a disk of radius  $R$  and mass  $M$  is  $I = \frac{1}{2}MR^2$ . Which of the following equations of motion is correct?

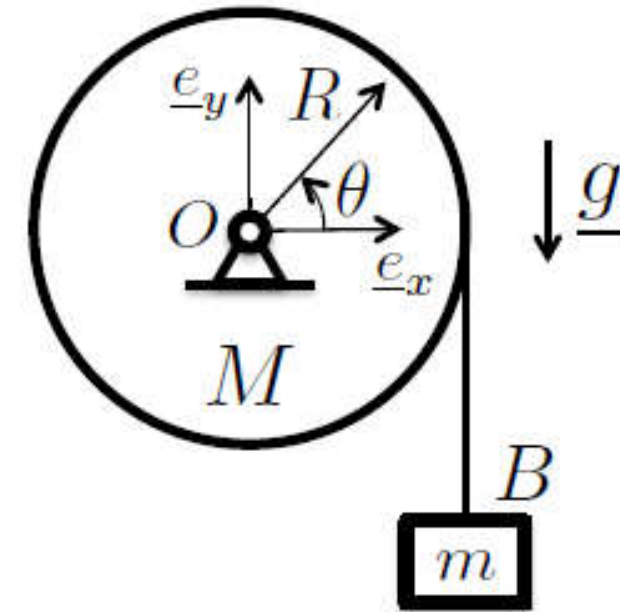
(a)  $\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta} + mgR \cos \theta = 0$

(b)  $(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2)\ddot{\theta} + mgR = 0$

(c)  $(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2)\ddot{\theta} + mgR(1 + \cos \theta) = 0$

(d)  $\frac{1}{2}MR^2 + mR\ddot{\theta} - mgR(1 + \cos \theta) = 0$

(e)  $\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} + mgR = 0$



# Kaffeepause

Beginn:

# Energie des Mehrkörpersystems

## Lagrange-Formalismus

$$L = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = 0$$

## Energie des Mehrkörpersystems

mit  $W$  als Leistung

$$W_{M,aktiv} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$W_{R,passiv} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}$$

$$\frac{\Delta E_s}{\Delta t} = \sum_i W_{R,i} + \sum_j W_{M,j} - \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

## Inverse dynamische Analyse

mit  $R$  als Reaktionskräfte

$$2D: J_0 \alpha = M_{zp} + M_{zd} + \sum_i (R_{x,i} \cdot l_{x,i} + R_{y,i} \cdot l_{y,i})$$

## Euler-Gleichungen

Für rotierende Starrkörpersysteme:

$$F_x = m \left( \frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y \right)$$

$$F_y = m \left( \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z \right)$$

$$F_z = m \left( \frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x \right)$$

$$M_x = J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z$$

$$M_y = J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x$$

$$M_z = J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y$$

## Muskelmechanik

Hillmodell, mit Muskelkraft  $F$

$$F(v) = F_0 - (F_0 + a) \frac{v}{v+b} = \frac{F_0 b - av}{v+b}$$

$$L(v) = v F(v)$$

$$\dot{Q}(v) = \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{F(v)}{F_0} \right) (v+b)$$

Huxleymodell:

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = f(x)[1 - n(x,t)] - g(x) \cdot n(x,t) - v(t) \cdot n'(x,t)$$

$$\bar{n}(x) = \frac{f(x)}{f(x) + g(x)} \quad \text{isometrisch}$$

## Muskeloptimierung

$$J = \psi(F_1, F_2, \dots, F_N) - \lambda (M_{tot} - \sum_{i=1}^N h_i \cdot F_i)$$

## Harmonischer Oszillator

$$m\ddot{y} = -ky + mg$$

$$y(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t + \frac{g}{\omega^2}$$

## Übergang Laufen-Gehen

$$r(t) = l_0 + \frac{r_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega^2} (\cos(\omega t) - 1)$$

$$\Delta l_{hor} = l_0 (1 - \sin(\alpha_0))$$

## Hilfsgleichungen

Quadratische Lösungsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sinus- und Kosinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

# Energiefluss

## Energie des Mehrkörpersystems

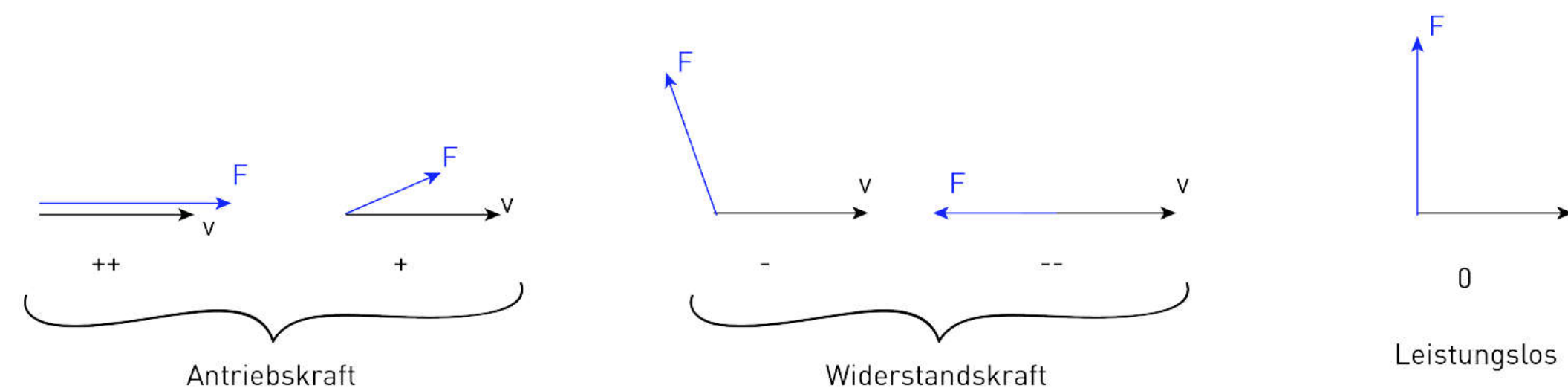
mit  $W$  als Leistung

$$W_{M,\text{aktiv}} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

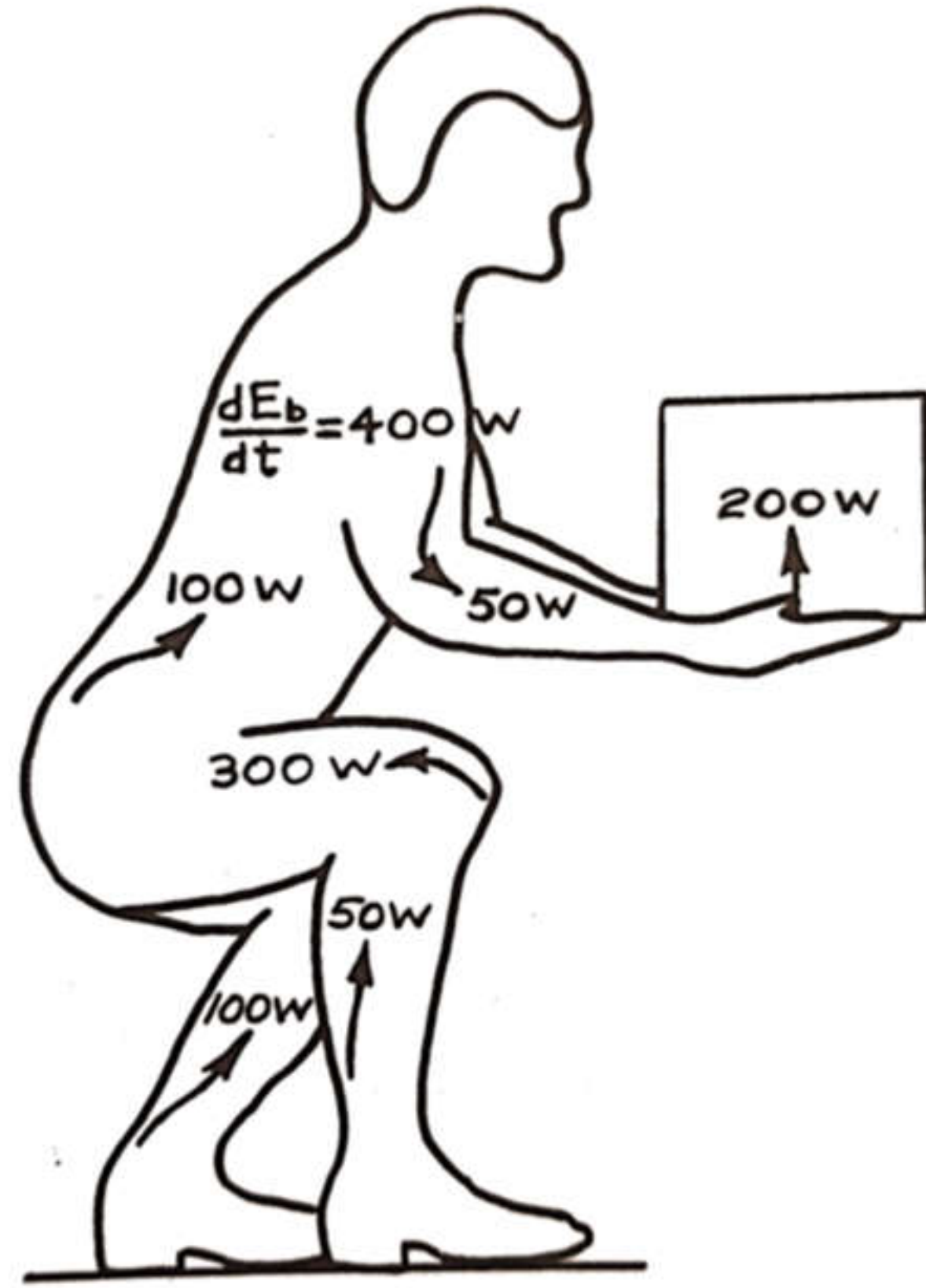
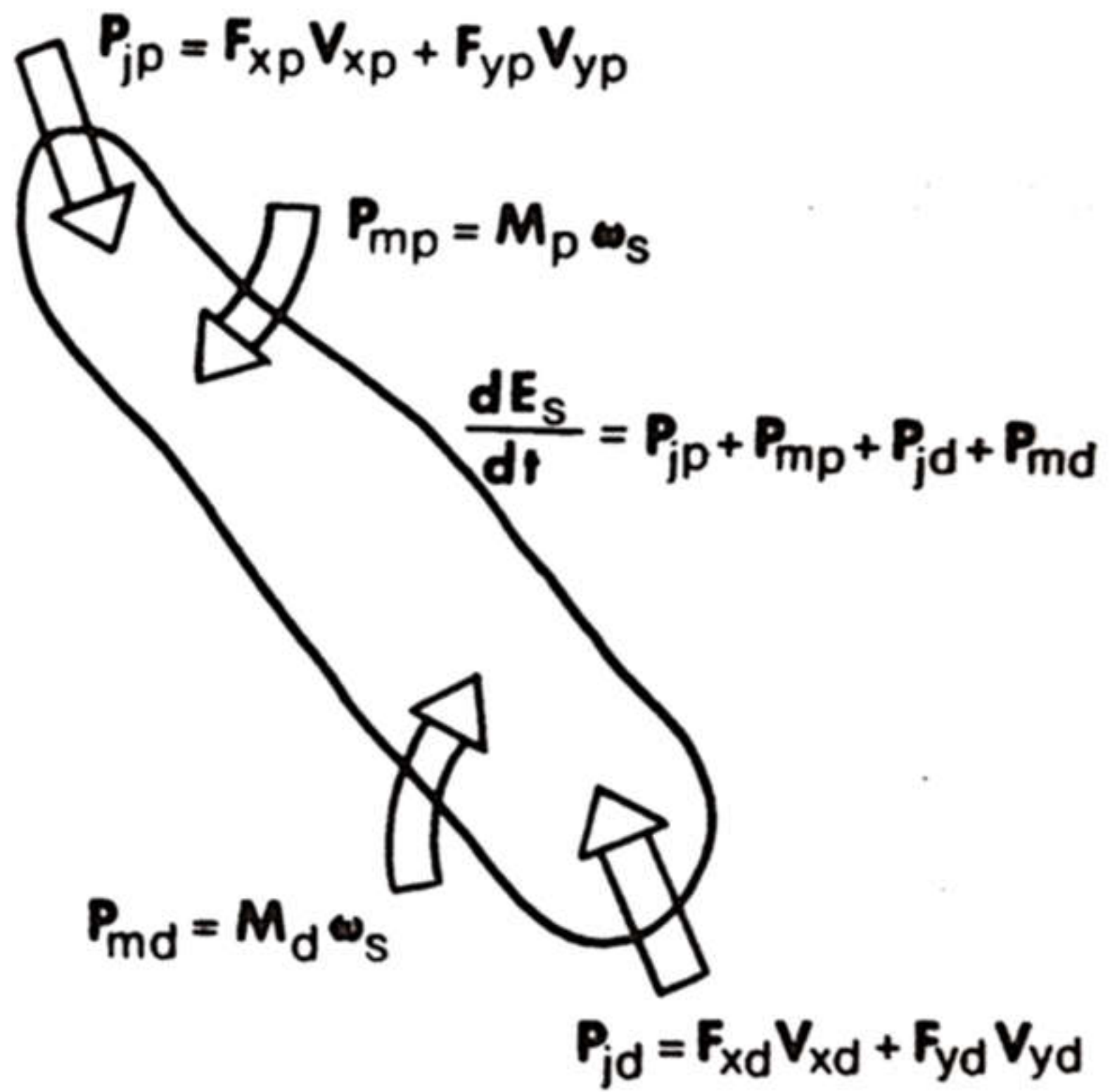
$$W_{R,\text{passiv}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}$$

$$\frac{\Delta E_s}{\Delta t} = \sum_i^2 W_{R,i} + \sum_j^N W_{M,j} - \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

$$\eta = \frac{\text{nutzbare Leistung o. Energie}}{\text{gesamte Leistung o. Energie}} < 1$$



# Energiefluss



# Euler

## Euler-Gleichungen

Für rotierende Starrkörpersysteme:

$$F_x = m \left( \frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y \right)$$

$$F_y = m \left( \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z \right)$$

$$F_z = m \left( \frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x \right)$$

$$M_x = J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z$$

$$M_y = J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x$$

$$M_z = J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y$$

<https://www.youtube.com/watch?v=NeXIV-wMVUk>

<https://n.ethz.ch/~stiegerc/HS09/Mechanik/Unterlagen/Lecture19.pdf>



# Harmonischer Oszillator

## Lagrange-Formalismus

$$L = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = 0$$

## Energie des Mehrkörpersystems

mit  $W$  als Leistung

$$W_{M, \text{aktiv}} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$W_{R, \text{passiv}} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}$$

$$\frac{\Delta E_s}{\Delta t} = \sum_i W_{R,i} + \sum_j W_{M,j} - \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

## Inverse dynamische Analyse

mit  $R$  als Reaktionskräfte

$$2D: J_0 \alpha = M_{zp} + M_{zd} + \sum_i (R_{x,i} \cdot l_{x,i} + R_{y,i} \cdot l_{y,i})$$

## Euler-Gleichungen

Für rotierende Starrkörpersysteme:

$$F_x = m \left( \frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y \right)$$

$$F_y = m \left( \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z \right)$$

$$F_z = m \left( \frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x \right)$$

$$M_x = J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z$$

$$M_y = J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x$$

$$M_z = J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y$$

## Muskelmechanik

Hillmodell, mit Muskelkraft  $F$

$$F(v) = F_0 - (F_0 + a) \frac{v}{v+b} = \frac{F_0 b - av}{v+b}$$

$$L(v) = vF(v)$$

$$\dot{Q}(v) = \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{F(v)}{F_0} \right) (v+b)$$

Huxleymodell:

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = f(x)[1 - n(x,t)] - g(x) \cdot n(x,t) - v(t) \cdot n'(x,t)$$

$$\bar{n}(x) = \frac{f(x)}{f(x) + g(x)} \quad \text{isometrisch}$$

## Muskeloptimierung

$$J = \psi(F_1, F_2, \dots, F_N) - \lambda (M_{\text{tot}} - \sum_{i=1}^N h_i \cdot F_i)$$

## Harmonischer Oszillator

$$m\ddot{y} = -ky + mg$$

$$y(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t + \frac{g}{\omega^2}$$

## Übergang Laufen-Gehen

$$r(t) = l_0 + \frac{r_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega^2} (\cos(\omega t) - 1)$$

$$\Delta l_{\text{hor}} = l_0(1 - \sin(\alpha_0))$$

## Hilfsgleichungen

Quadratische Lösungsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

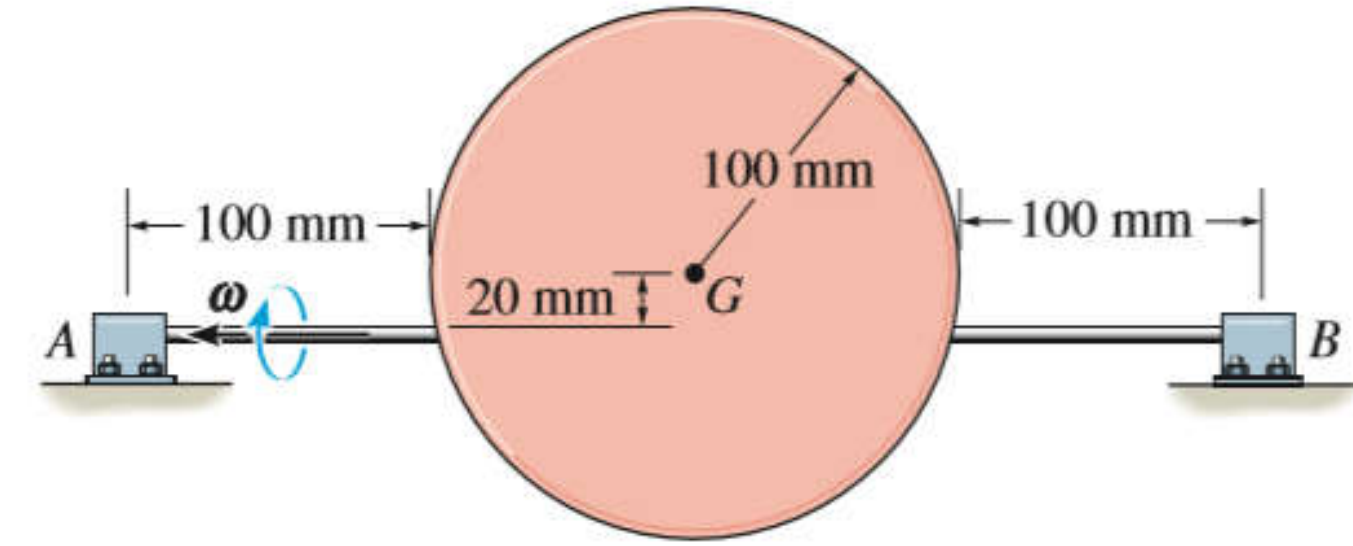
Sinus- und Kosinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin b} = \frac{c}{\sin c}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

# Übung XXX – Euler

The 5-kg circular disk is mounted off center on a shaft which is supported by bearings at  $A$  and  $B$ . If the shaft is rotating at a constant rate of  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ , determine the vertical reactions at the bearings when the disk is in the position shown.



# Harmonischer Oszillator

$$m\ddot{y} = -ky + mg$$

$$y(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t + \frac{g}{\omega^2}$$

# Kaffeepause

Beginn:

# Harmonischer Oszillator

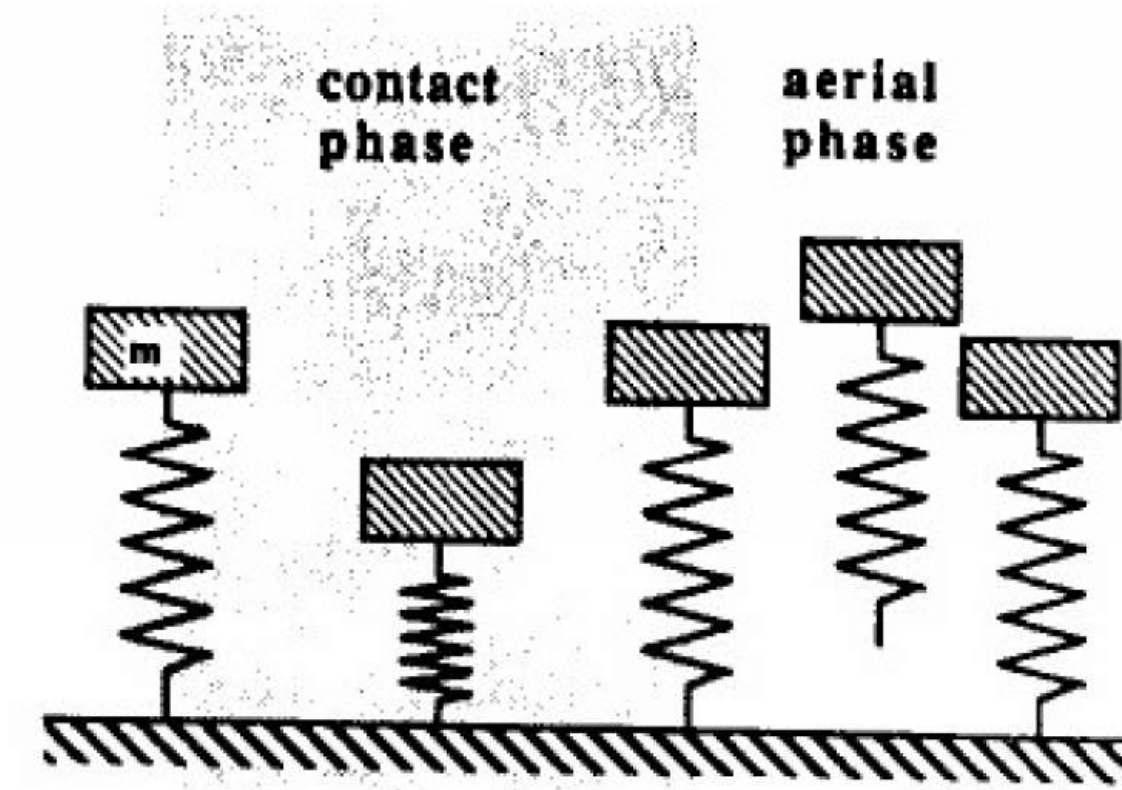
$$m\ddot{y} = -ky + mg$$

$$y(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t + \frac{g}{\omega^2}$$

3 Gleichungen für 3 Unbekannten:

- $A_1$ : Amplitude sin
- $A_2$ : Amplitude cos
- $\omega$ : Frequenz

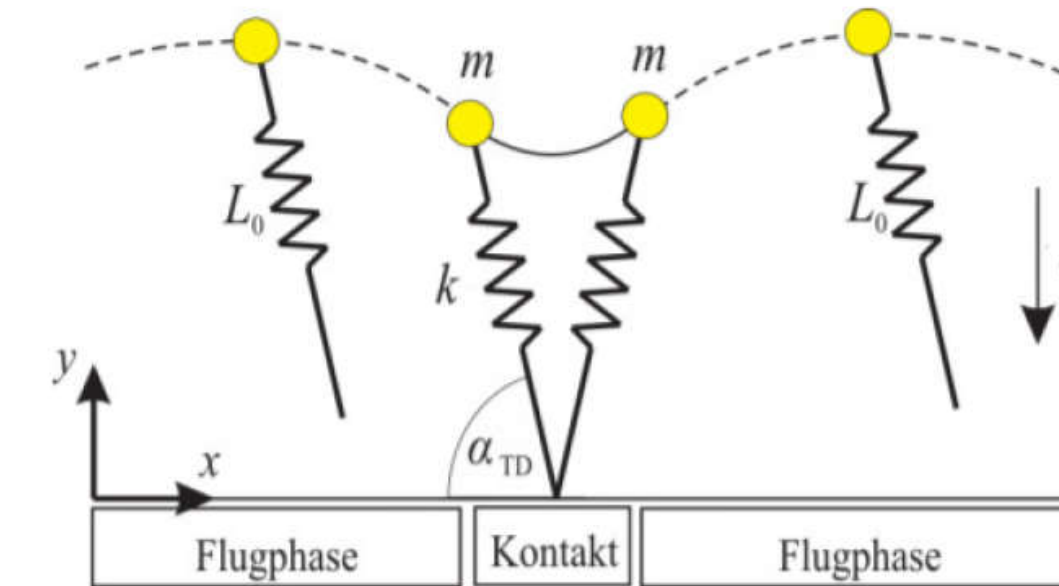
SPRING-  
MASS  
SYSTEM



$$m\ddot{y} = -ky + mg$$

$$m\ddot{y} = mg$$

Vogl, Schütz FS 2019 544



Flugphase:

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

Kontaktphase:

$$\begin{pmatrix} F_{B,x} \\ F_{B,y} \end{pmatrix} = -k(l_0 - l) \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix},$$

Vogl, Schütz FS 2019 547

# Übung – Harmonischer Oszillator (Vorlesung)

Ein Kind hüpfert mit seinem Hüpfstab ( $m_{ges} = 30 \text{ kg}$ ) vertikal am selben Ort auf und ab. Am höchsten Punkt der Flugphase befindet sich der unterste Punkt des Stabes mit entspannter Feder 20 cm über dem Boden. Um welche Distanz ist die Feder zum Zeitpunkt  $t = 0.2 \text{ s}$  der Kontaktphase (also nach Auftreffen auf dem Boden) komprimiert, wenn die Stahlfeder im Stab eine Federkonstante von  $k = 3000 \text{ N m}^{-1}$  hat?

# Muskel

## Muskelmechanik, Muskeloptimierung

### Lagrange-Formalismus

$$L = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = 0$$

### Energie des Mehrkörpersystems

mit  $W$  als Leistung

$$W_{M,aktiv} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$W_{R,passiv} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}$$

$$\frac{\Delta E_s}{\Delta t} = \sum_i^2 W_{R,i} + \sum_j^N W_{M,j} - \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

### Inverse dynamische Analyse

mit  $R$  als Reaktionskräfte

$$2D: J_0 \alpha = M_{zp} + M_{zd} + \sum_i (R_{x,i} \cdot l_{x,i} + R_{y,i} \cdot l_{y,i})$$

### Euler-Gleichungen

Für rotierende Starrkörpersysteme:

$$F_x = m \left( \frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y \right)$$

$$F_y = m \left( \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z \right)$$

$$F_z = m \left( \frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x \right)$$

$$M_x = J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z$$

$$M_y = J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x$$

$$M_z = J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y$$

### Muskelmechanik

Hillmodell, mit Muskelkraft  $F$

$$F(v) = F_0 - (F_0 + a) \frac{v}{v+b} = \frac{F_0 b - av}{v+b}$$

$$L(v) = vF(v)$$

$$\dot{Q}(v) = \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{F(v)}{F_0} \right) (v+b)$$

Huxleymodell:

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = f(x)[1 - n(x, t)] - g(x) \cdot n(x, t) - v(t) \cdot n'(x, t)$$

$$\bar{n}(x) = \frac{f(x)}{f(x) + g(x)} \quad \text{isometrisch}$$

### Muskeloptimierung

$$J = \psi(F_1, F_2, \dots, F_N) - \lambda (M_{tot} - \sum_{i=1}^N h_i \cdot F_i)$$

### Harmonischer Oszillator

$$m\ddot{y} = -ky + mg$$

$$y(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t + \frac{g}{\omega^2}$$

### Übergang Laufen-Gehen

$$r(t) = l_0 + \frac{r_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{g}{\omega^2} (\cos(\omega t) - 1)$$

$$\Delta l_{hor} = l_0(1 - \sin(\alpha_0))$$

### Hilfsgleichungen

Quadratische Lösungsformel

$$ax^2 + bx + c = 0 \implies$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sinus- und Kosinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin b} = \frac{c}{\sin c}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

# Muskel

## Muskelmechanik

Hillmodell, mit Muskelkraft  $F$

$$F(v) = F_0 - (F_0 + a) \frac{v}{v + b} = \frac{F_0 b - av}{v + b}$$

$$\dot{Q}(v) = \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{F(v)}{F_0} \right) (v + b)$$

Huxleymodell:

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = f(x)[1 - n(x, t)] - g(x) \cdot n(x, t) - v(t) \cdot n'(x, t)$$

$$\tilde{n}(x) = \frac{f(x)}{f(x) + g(x)} \quad \text{isometrisch}$$



# Muskel

## Muskelmechanik

Hillmodell, mit Muskelkraft  $F$

$$F(v) = F_0 - (F_0 + a) \frac{v}{v + b} = \frac{F_0 b - av}{v + b}$$

$$\dot{Q}(v) = \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{F(v)}{F_0} \right) (v + b)$$

$$F(v_{max}) = 0$$

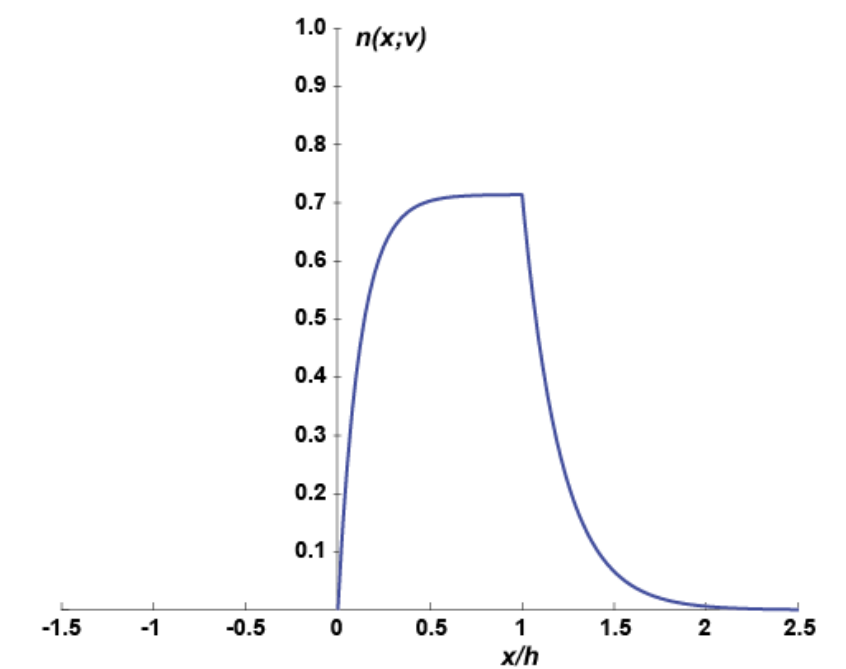
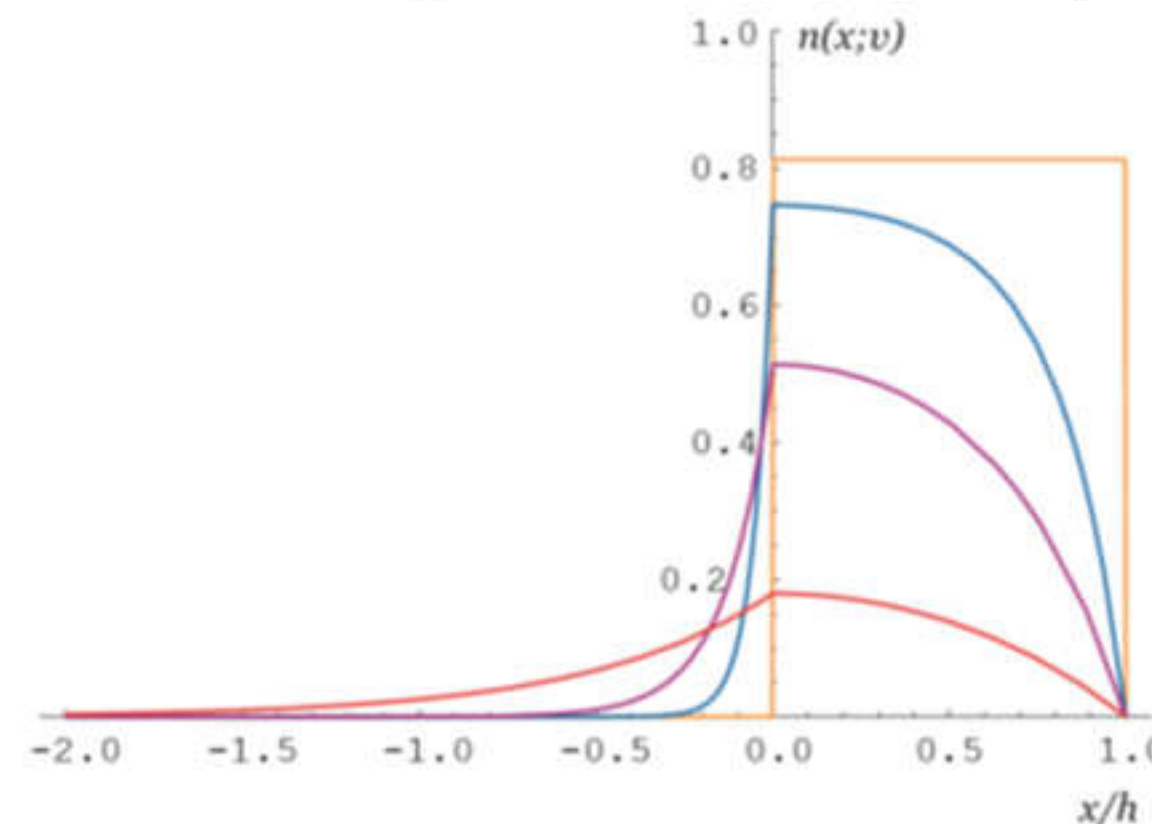
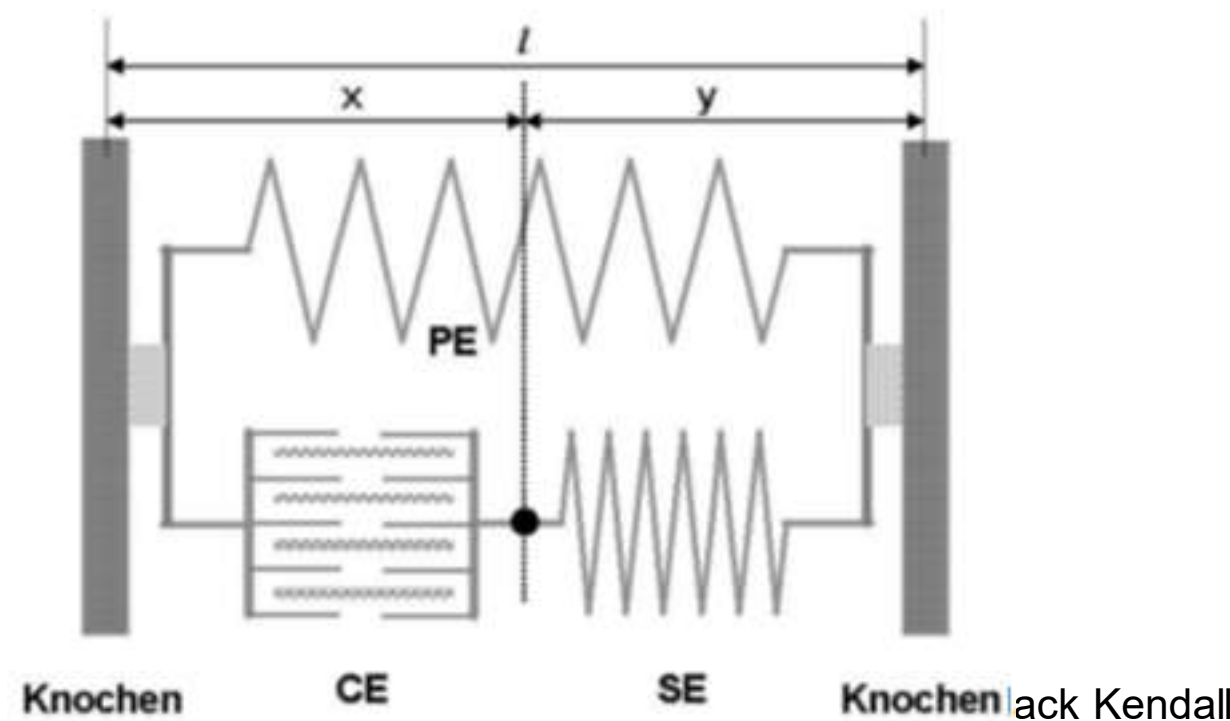
Huxleymodell:

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = f(x)[1 - n(x, t)] - g(x) \cdot n(x, t) - v(t) \cdot n'(x, t)$$

$$\tilde{n}(x) = \frac{f(x)}{f(x) + g(x)} \quad \text{isometrisch}$$

- In der Biomechanik das meist benutzte Modell.
- Kann auf den ganzen Muskel-Sehnen Komplex angewendet werden, falls angenommen wird dass alle Fasern den aus dem gleichen Fasertyp bestehen, die gleiche Länge haben und im optimalen Längenbereich bei maximaler Aktivität arbeiten.
- Bietet keinen Einblick in den Mechanismus der Kontraktion und Kraftentwicklung innerhalb der motorischen Einheit und es wird angenommen, dass die Anzahl der möglichen Querbrücken bei maximaler Aktivierung konstant bleibt.

- Erlaubt die Beschreibung der Kraftentwicklung für jede mögliche Ausgangslänge und Verkürzungsgeschwindigkeiten des Sarkomers.
- Die Entwickelte Kraft hängt von der Anzahl der gebildeten Querbrücken und der Auslenkung der Bindungsglieder ab.
- Die Anzahl der Querbrücken ist wiederum abhängig von der Ausgangslänge des Sarkomers, der Querbrückenbildungsrate und der Lösungsrate, sowie der Geschwindigkeit der Kontraktion (viskose Effekte).



# Kaffeepause

Beginn:

# Muskel

## Muskeloptimierung

$$J = \psi(F_1, F_2, \dots, F_N) - \lambda \left( M_{tot} - \sum_{i=1}^N h_i \cdot F_i \right)$$

### 1. Kriterium $\psi$ :

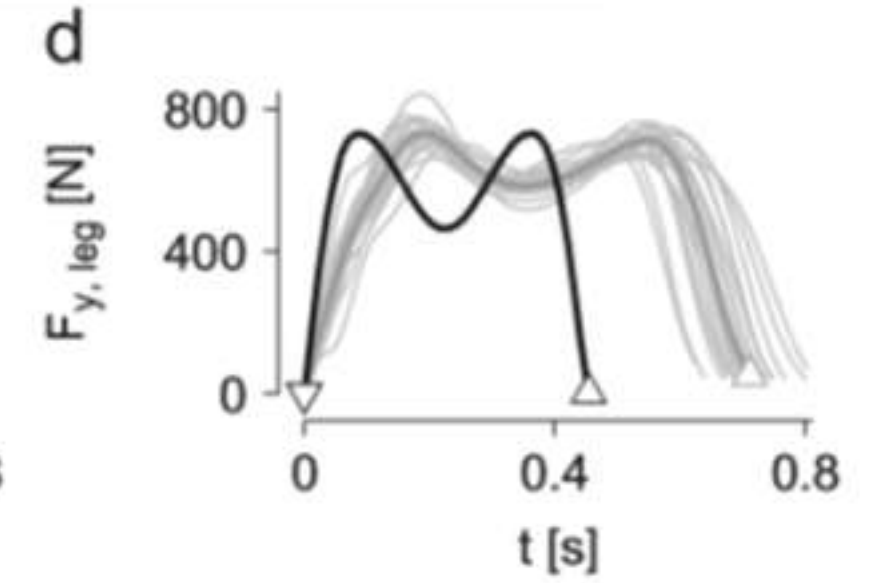
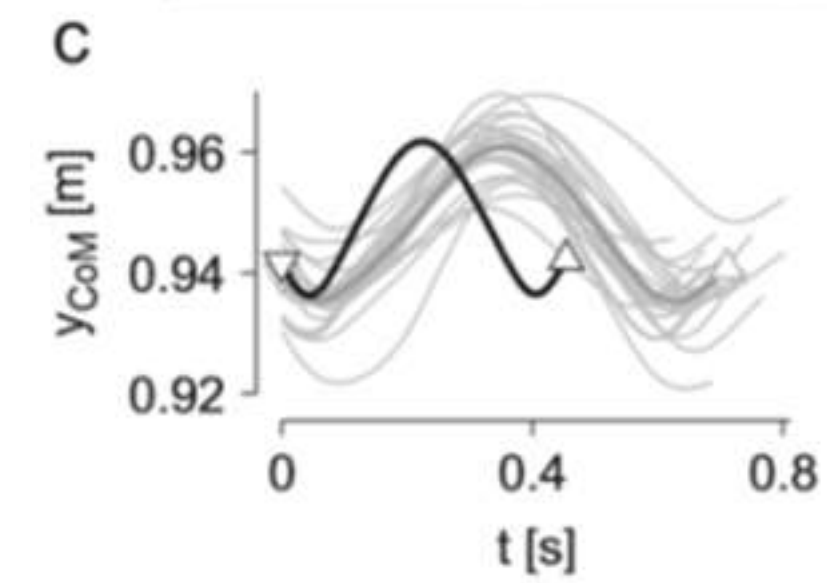
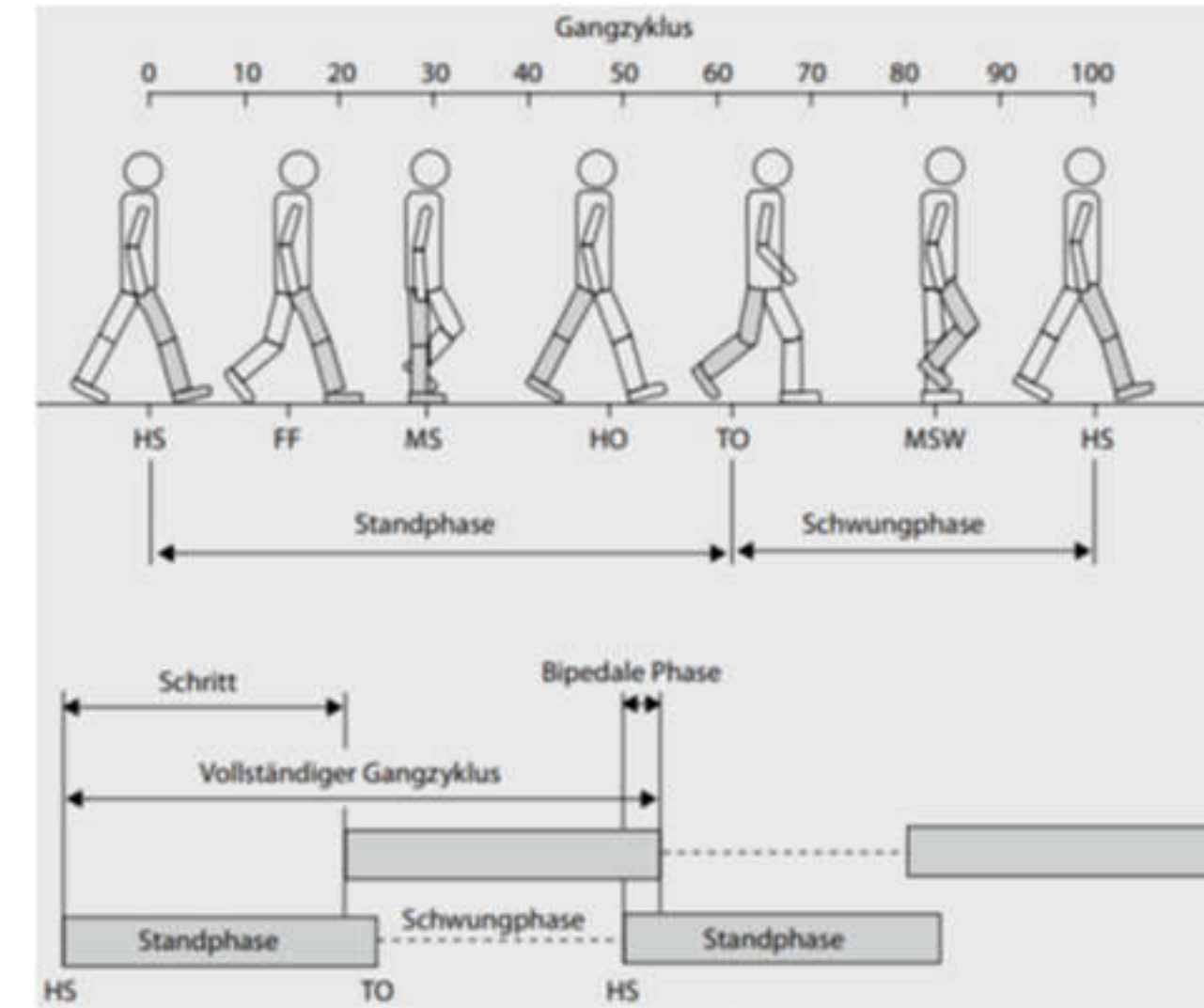
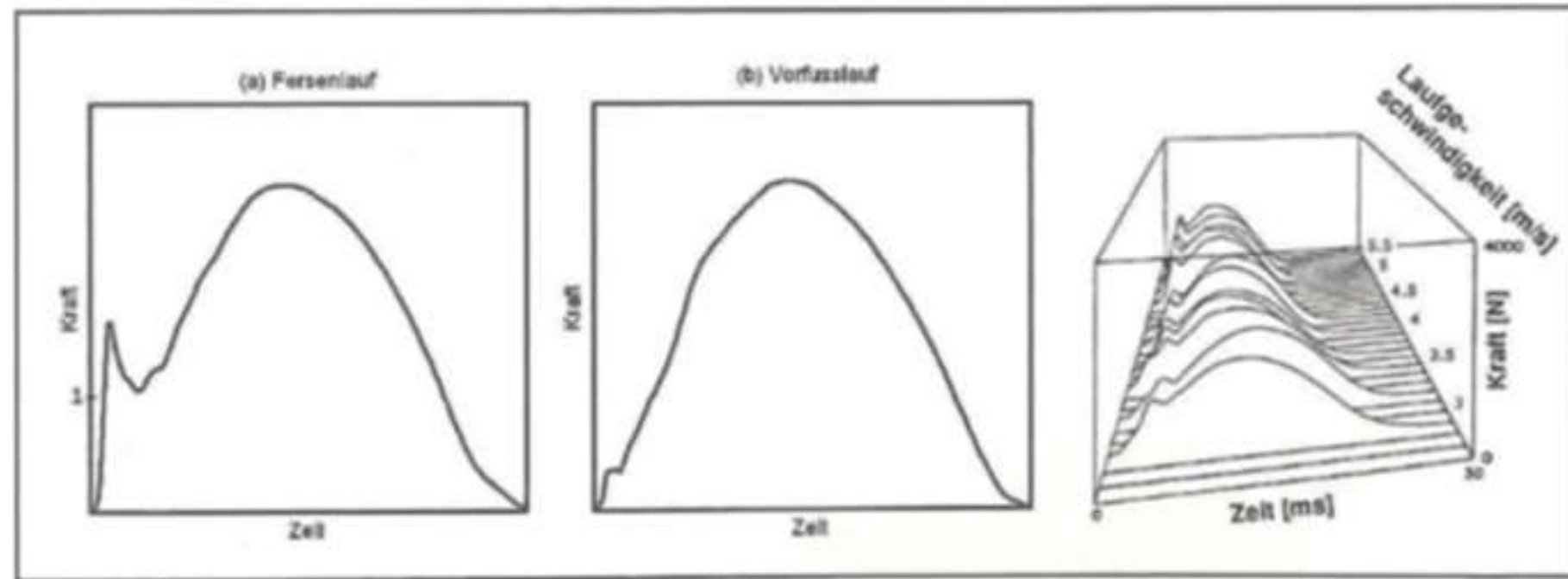
- Summe der Muskelkräfte ist minimal
- Summe der Spannung ist minimal
- Summe der quadrierten Muskelkräfte ist minimal
- Beliebige

### 2. Ableiten:

- Ganze Funktion ableiten und gleich null setzen:  $\frac{\partial J}{\partial \lambda} = 0$ ,  $\frac{\partial J}{\partial F_1} = 0$ ,  $\frac{\partial J}{\partial F_i} = 0$ , ...

### 3. Gleichungssystem lösen

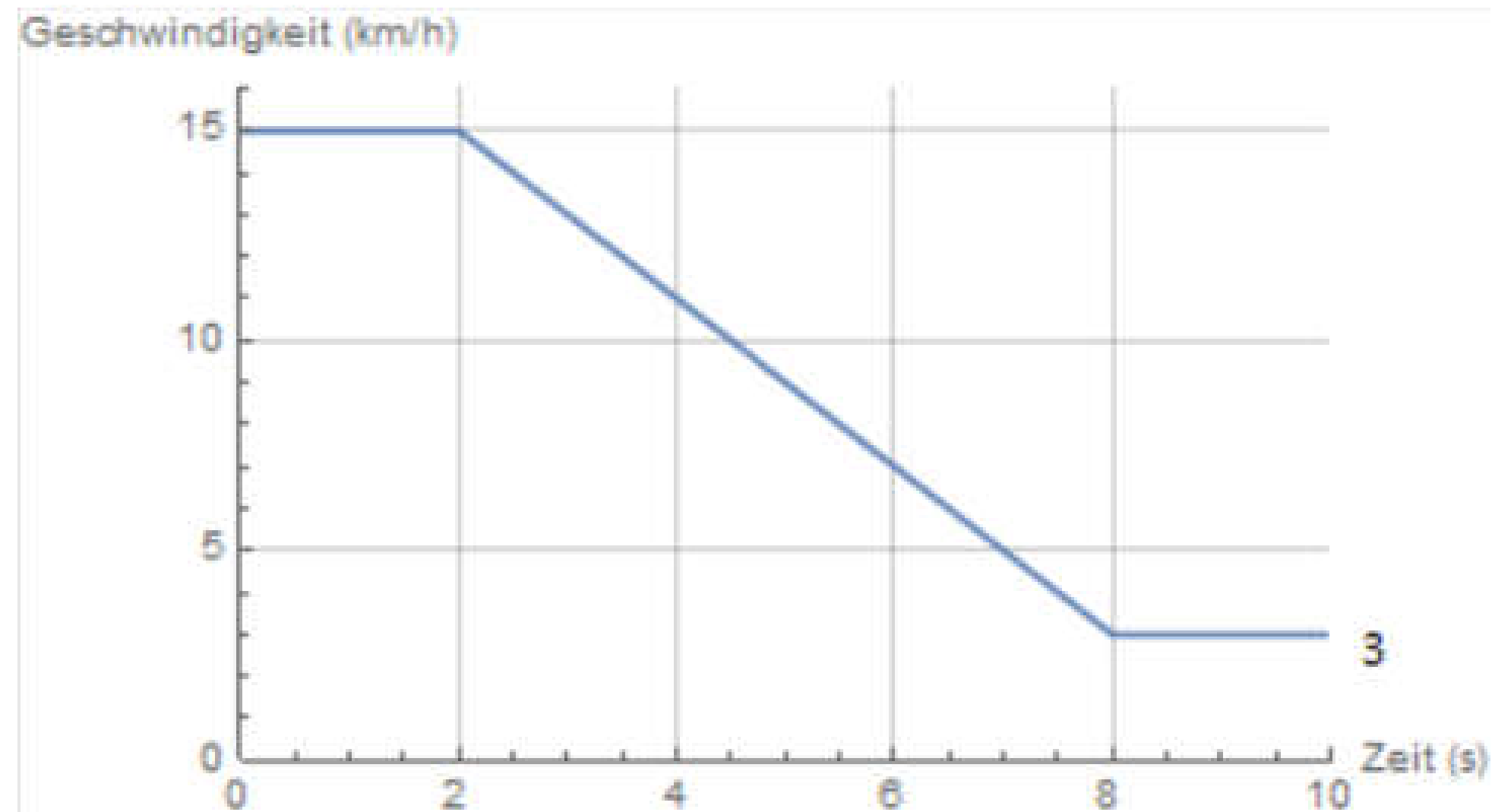
# Gangarten



# Lösungswege Alter Prüfungen

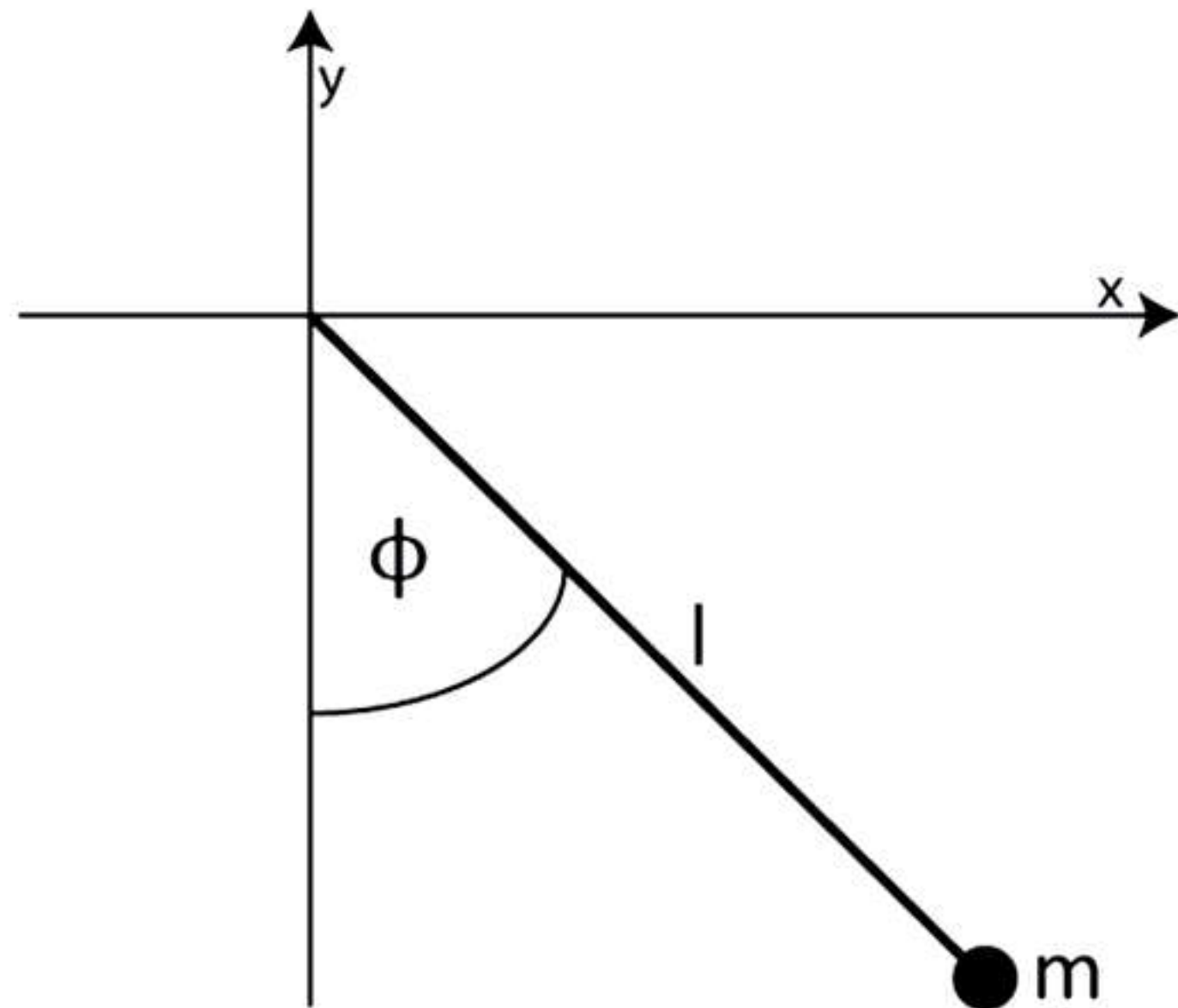
# Alte Prüfung - Winter 19.1 Arbeit / $F = ma$

Ein Fahrradfahrer (Gesamtmasse  $m = 83\text{kg}$ ) fährt entlang der Flusspromenade und verlangsamt seine Geschwindigkeit. Berechnen Sie anhand des folgenden Geschwindigkeits-Zeit Diagramms die Bremskraft.



# Alte Prüfung - Winter 19.3 Lagrange

Ein Turner an der Reckstange kann in erster Näherung als ein mathematisches Pendel der Masse  $m = 70\text{kg}$  und Länge  $l = 0.8\text{m}$  beschrieben werden. Bewerten Sie ob folgendene Funktionen gültige Lagrange-Funktionen für dieses Problem sind:



$$L(\phi, \dot{\phi}) = 32.20\dot{\phi}^2 + 221.18 \cos \dot{\phi} \text{ (Joule)}$$

$$L(\phi, \dot{\phi}) = 11.20\dot{\phi}^2 + 549.36 \cos \phi \text{ (Joule)}$$

$$L(\phi, \dot{\phi}) = 32.20\dot{\phi}^2 + 221.18 \cos \dot{\phi} + 18.10 \text{ (Joule)}$$

$$L(\phi, \dot{\phi}) = 11.20\dot{\phi}^2 + 549.36 \cos \dot{\phi} \text{ (Joule)}$$

# Alte Prüfung - Winter 19.4 Harmonischer Oszillator

Sie untersuchen die Wischbewegung beim Curling. Lösung der Bewegungsgleichungen ergibt folgendes Model für die horizontale Auslenkung des Wischbesens:  $x(t) = A \sin(\omega t + B)$ , mit  $A, B$  den unbestimmten Konstanten.

Berechnen Sie die Auslenkung zum Zeitpunkt  $t = 2\text{s}$ , wenn  $\omega = \sqrt{2} (1/\text{s})$  und die Auslenkung und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  als  $x(0) = 1/\sqrt{2}\text{m}$  und  $\dot{x}(0) = 1\text{m/s}$  gegeben sind.





# Alte Prüfung - Sommer 19.12 Harmonischer Oszillator

Ein Bungee-Jumping-Springerin ( $m_{ges}=65\text{kg}$ ) möchte das Verhalten des Seils modellieren wenn sie abgebremst wird. Hierzu nimmt sie das Bungee-Seil als Feder mit Federkonstante  $k=50\text{Nm}$  an. Nach dem freien Fall erreicht die Springerin zum Zeitpunkt  $t=0$  eine Geschwindigkeit von  $28\text{ms}$  bevor das Seil gedehnt wird und die Springerin durch das Seil abgebremst wird. Wie gross ist die Auslenkung des Seils zum Zeitpunkt  $t=3$

# Alte Prüfung - Winter 19.9 Muskel Optimierung

Für folgende Hebelarme für M. Soleus und M. Gastrocnemius und einem Gelenkmoment von  $M = 15\text{N m}$ , finden Sie die Kraft im M. Soleus die das Muskeloptimierungskriterium  $\psi = \sum_i 3F_i^2$  unter der Bedingung  $\sum_i h_i F_i = M$  minimiert.  
 $h_{So} = 4.2\text{cm}$ ,  $h_{Ga} = 5.1\text{cm}$

# Alte Prüfung - Winter 19.11 Arbeit

Obwohl beim Fallschirmsprung Axels Fallschirm versagte, verletzte er sich bei seiner Landung im Schnee nur leicht. Unter der Annahme, dass Axel (inkl. Ausrüstung)  $m = 85\text{kg}$  schwer war, seine Aufprallgeschwindigkeit  $v_0 = 56\text{m/s}$  betrug, und der Schnee eine konstante (überlebbare) Kraft von  $1.2 * 10^5$  Newton auf ihn ausübte - wie tief war der Schnee mindestens?

# Alte Prüfung - Winter 19.15 Muskel (Hill)

Für einen unbekanntem Muskel (reiner Typ) mit dem Querschnitt  $A_0 = 10\text{cm}^2$  und den charakteristischen Parametern  $a = 150\text{N}$  und  $b = 27\text{cm/s}$  wurde mit der Kraft-Geschwindigkeitsrelation (Hill)  $P(v)$  eine maximale Verkürzungsgeschwindigkeit von  $v_{max} = 0.9\text{m/s}$  berechnet.

Wie viel Kraft kann dieser Muskel bei einer isometrischen Kontraktion pro Quadratcentimeter maximal erzeugen?

# Alte Prüfung - Winter 19.22 Energie

Eine Murmel (Masse  $m = 3\text{g}$ , Radius  $r = 7.5\text{mm}$ ) rollt mit einer Geschwindigkeit von  $v = 3.5\text{m/s}$  auf eine Rampe der Höhe  $h = 4.5\text{m}$  zu. Welche lineare Geschwindigkeit hat die Murmel nachdem sie die Rampe hinuntergerollt ist?

Anmerkung: Die Murmel kann als homogene Kugel angenommen werden und rollt ohne zu rutschen.  
Trägheitsmoment einer Kugel bzgl einer Achse durch den Schwerpunkt  $I = \frac{2}{5}MR^2$ .

# Alte Prüfung - Winter 19.29 Leistung

Für folgende Werte der aktiven und passiven Energieflüsse pro Zeiteinheit, berechnen Sie die Leistung die vom Unterschenkelsegment verrichtet wird.



# Alte Prüfung - Winter 19.21 Transformation

Ein Kraftvektor wird durch die folgenden Elementarrotationen vom lokalen Koordinatensystem ins globale Koordinatensystem transformiert:

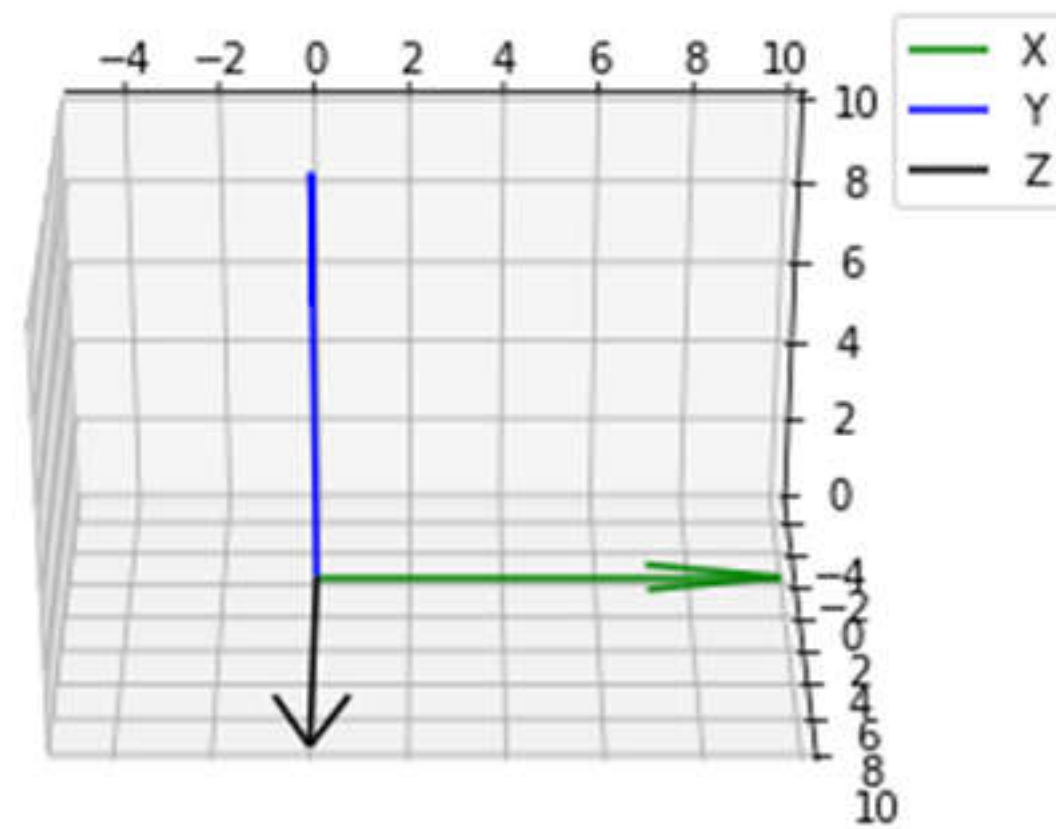
Zuerst  $60^\circ$  um die z-Achse und anschliessend  $90^\circ$  um die y-Achse.

# Alte Prüfung - Winter 19.21 Transformation

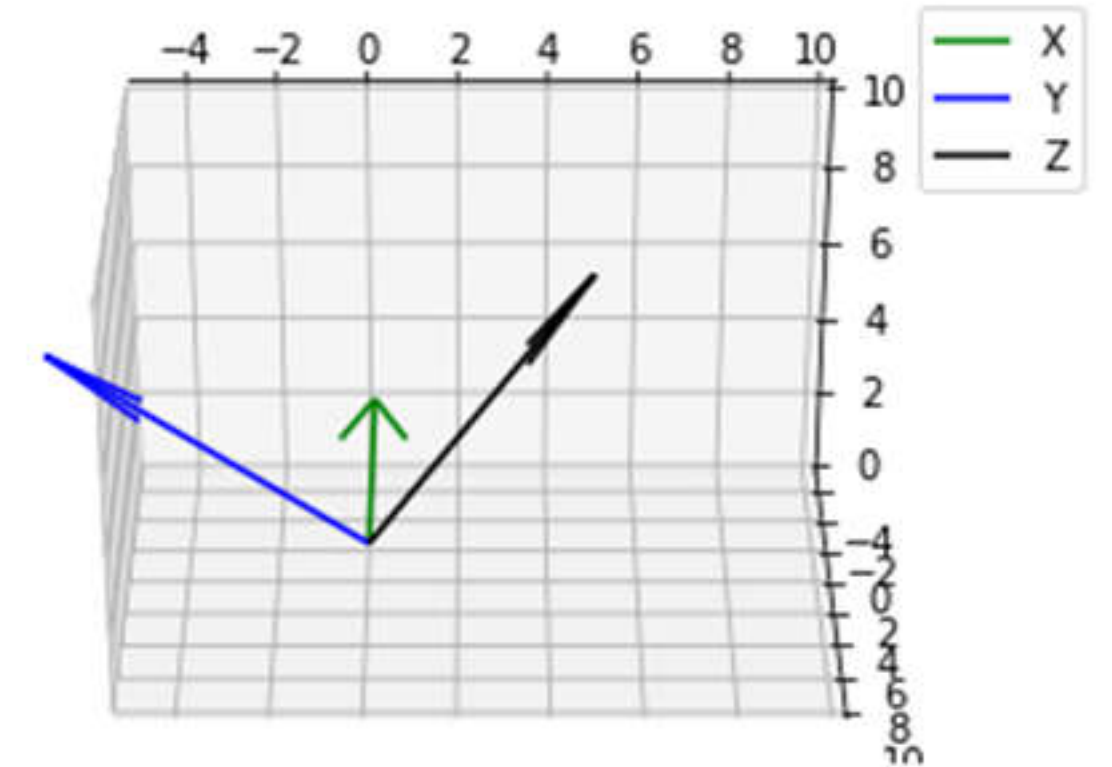
Ein Kraftvektor wird durch die folgenden Elementarrotationen vom lokalen Koordinatensystem ins globale Koordinatensystem transformiert:

Zuerst  $60^\circ$  um die z-Achse und anschliessend  $90^\circ$  um die y-Achse.

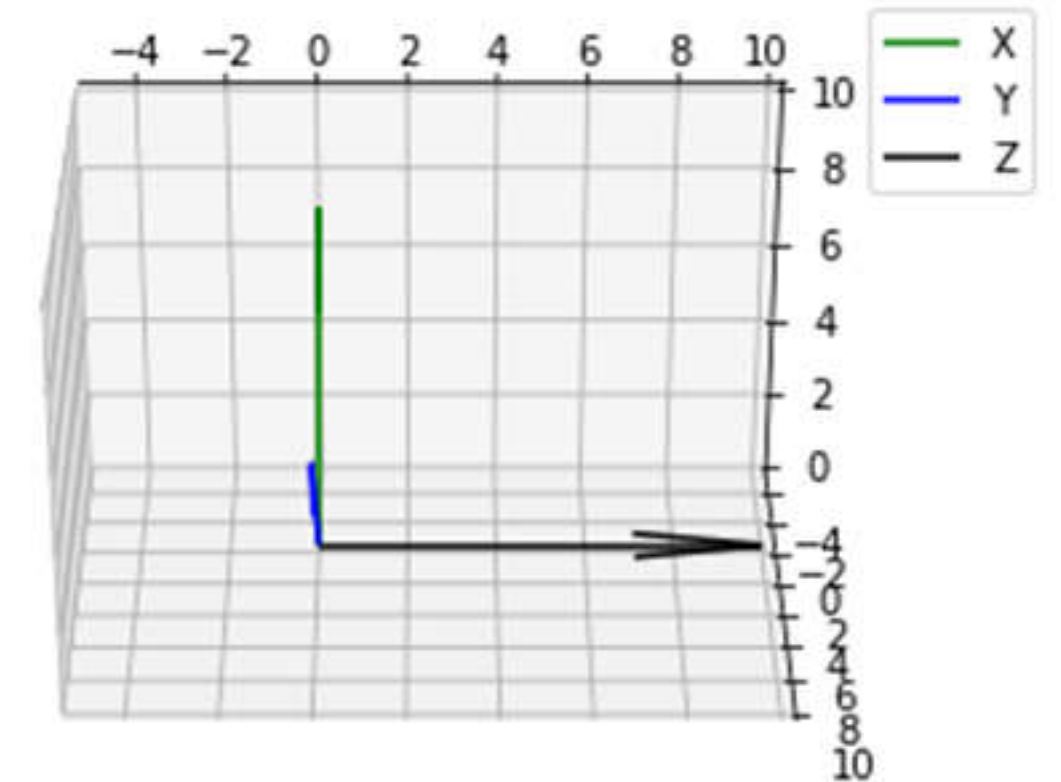
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



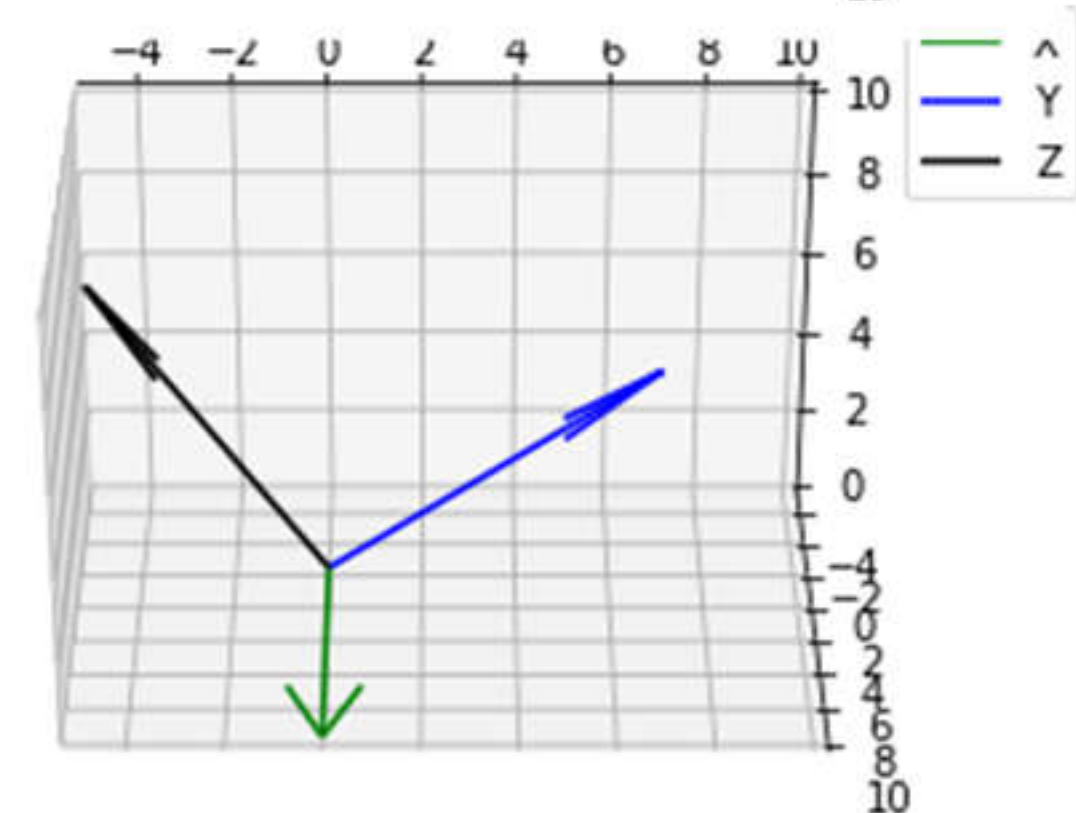
$$R = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$



$$R = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



[https://en.wikipedia.org/wiki/Givens\\_rotation/Dimension\\_3](https://en.wikipedia.org/wiki/Givens_rotation/Dimension_3)

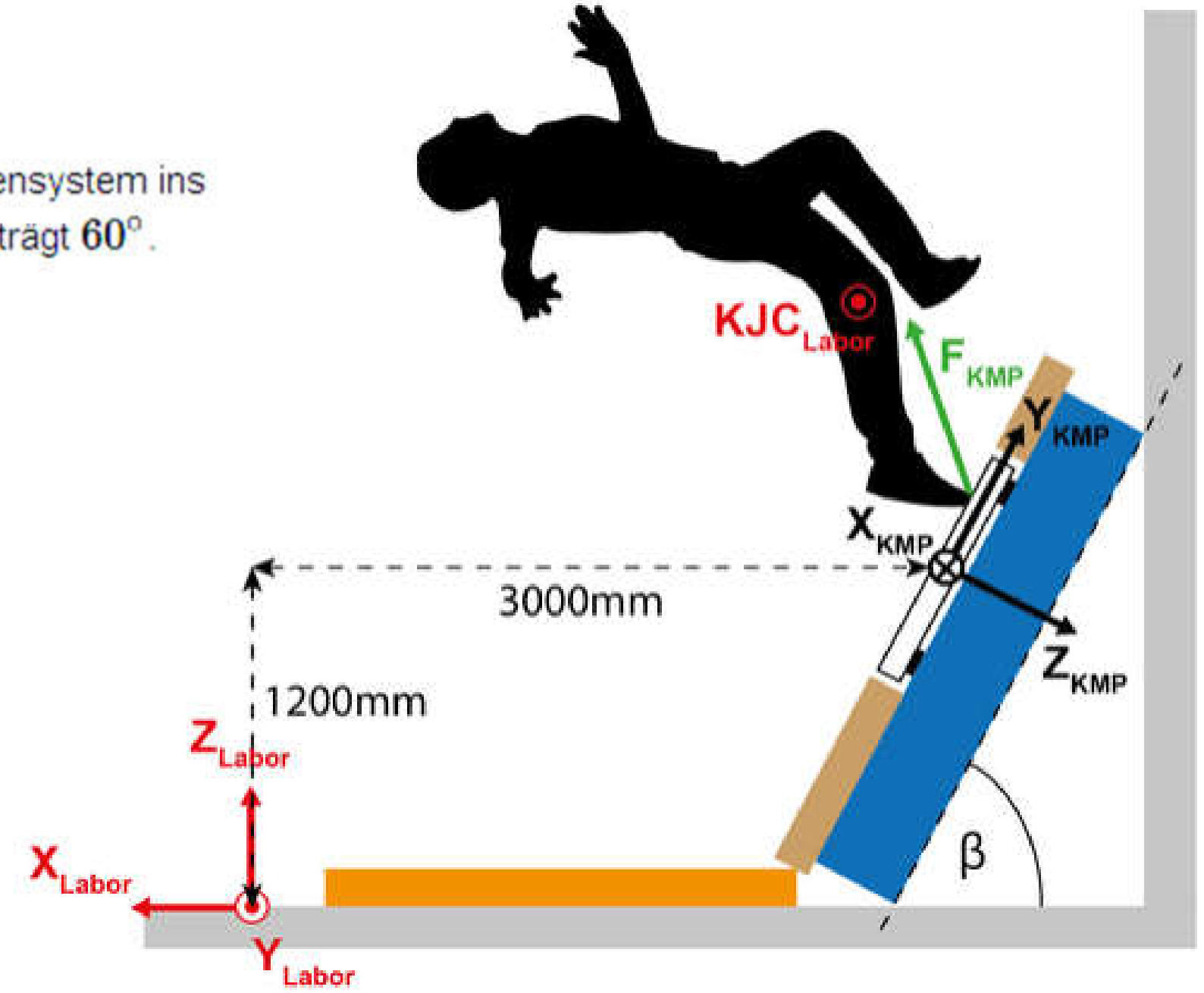
[https://en.wikipedia.org/wiki/Davenport\\_chained\\_rotations](https://en.wikipedia.org/wiki/Davenport_chained_rotations)



# Alte Prüfung - Sommer 19.21 Transformation

Um das externe Drehmoment im Knie bei einer Vorübung für den Wall-Flip zu bestimmen muss der Kraftvektor  $F_{KMP}$  vom Kraftmessplattenkoordinatensystem ins Laborkoordinatensystem transformiert werden ( $F_{Lab} = [{}^{Lab}R_{KMP}]F_{KMP}$ ). Beides sind orthogonale Koordinatensysteme und der Anstellwinkel  $\beta$  beträgt  $60^\circ$ .

Wie lautet die Rotationsmatrix  $[{}^{Lab}R_{KMP}]$  um den Kraftvektor vom Kraftmessplatten- ins Laborkoordinatensystem zu transformieren?



# Alte Prüfung - Sommer 19.1 Impulserhaltung

Beim Segeln herrscht Windstille. Plötzlich fällt von vorne ein Windstoss in einem Winkel von  $\alpha = \pi/4$  ein und versetzt das Boot (Gesamtmasse  $m = 300\text{kg}$ ) in Bewegung. Nach Wechselwirkung mit dem Segel strömt die Luft gerade beim Heck hinaus  $\alpha = \pi$ . Wenn der Impuls des Luftstosses vor und hinter dem Schiff  $|p| = 400\text{kg m/s}$  beträgt, berechnen Sie die Endgeschwindigkeit des Bootes in Fahrtrichtung.

Anmerkung: Vernachlässigen Sie alle Effekte des Wassers. Alle Winkel sind bezüglich der Bugrichtung gemessen.

